Diplomarbeit

Hochheben von Kurven in positiver Charakteristik nach Charakteristik Null

angefertigt am Mathematischen Institut

vorgelegt der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn

im September 1999

von Niko Beerenwinkel aus Düsseldorf

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p > 0$ und R ein kompletter, diskreter Bewertungsring der Charakteristik 0 mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, der k als Restklassenkörper besitzt, also $k = R/\mathfrak{m}$. Einen solchen Ring gibt es immer; man kann zum Beispiel den Ring $\mathcal{W}(k)$ der Wittvektoren über k nehmen. Mit K sei der Quotientenkörper von R bezeichnet.

Sei $\mathcal{S} \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ ein Schema über R. Der topologische Raum $\mathrm{Spec}(R)$ besteht aus dem abgeschlossenen Punkt $\mathfrak{m}$ und dem generischen Punkt (0). Über dem abgeschlossenen Punkt $\mathfrak{m}$ liegt das Schema

$$\mathcal{S}_k := \mathcal{S} \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(k),$$

die *abgeschlossene (oder spezielle) Faser von S*. Die Faser

$$\mathcal{S}_K := \mathcal{S} \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(K)$$

über dem generischen Punkt von $\mathrm{Spec}(R)$ heißt die *generische (oder allgemeine) Faser von $\mathcal{S}$*. Mit seinen Fasern bildet $\mathcal{S}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_K \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(K) \arrow[d] \\
\mathcal{S} \arrow[r] & \mathrm{Spec}(R) \\
\mathcal{S}_k \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Spec}(k) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

in dem alle Morphismen natürlich sind, d.h. die vertikalen Pfeile links sind die Projektionen und die vertikalen Pfeile rechts sind induziert von den natürlichen Homomorphismen

$$R \longrightarrow \mathrm{Quot}(R) = K \quad \text{und} \quad R \longrightarrow R/\mathfrak{m} = k.$$

Unter einer Kurve über einem Körper k verstehen wir ein reduziertes, separiertes k-Schema von endlichem Typ und reiner Dimension 1. Eine Kurve über R ist ein Morphismus von Schemata $\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$, dessen Fasern Kurven sind. Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Lösung des folgenden Problems:

Hochhebeproblem. *Gegeben sei eine irreduzible, nicht-singuläre, projektive Kurve C über k vom Geschlecht g. Man finde eine glatte Kurve $\mathcal{C}$ über R derart, daß die Fasern von $\mathcal{C}$ irreduzible, nicht-singuläre Kurven vom selben Geschlecht g sind und die abgeschlossene Faser $\mathcal{C}_k$ isomorph zu C über k ist.*

1.2 Anwendung: Die algebraische Fundamentalgruppe in positiver Charakteristik

Eine Lösung des obigen Problems findet seine Anwendung bei gewissen Problemstellungen, die man zunächst nur in Charakteristik 0 lösen kann und dann im Fall positiver Charakteristik auf den Fall der Charakteristik 0 zurückführen möchte. Wir betrachten dazu ein Beispiel (s. [Po2]). Sei C ein irreduzibles, reduziertes, noethersches, normales Schema über einem Körper k, $K(C)$ der Funktionenkörper von C und Ω ein fest gewählter algebraischer Abschluß von $K(C)$. Dann ist die Kategorie $\mathfrak{E}(C)$ der irreduziblen, etalen Überlagerungen von C äquivalent zu der Kategorie $\mathfrak{K}(C)$ der endlichen, separablen Körpererweiterungen $F/K(C)$, die in Ω enthalten sind und für die außerdem die Normalisierung $\widetilde{C} \longrightarrow C$ von C in F unverzweigt ist. Dabei wird einer Überlagerung $C' \in \mathfrak{E}(C)$ ihr Funktionenkörper zugeordnet. Das Kompositum L aller Körpererweiterungen aus $\mathfrak{K}(C)$ ist eine Galoiserweiterung $L/F(C)$. Die Gruppe

$$\pi_1(C) := \mathrm{Gal}(L/F(C))$$

heißt die *algebraische Fundamentalgruppe von* C. Per Definition ist sie eine proendliche Gruppe. Im allgemeinen ist ihre Struktur nicht bekannt. Allerdings gibt es im Fall $\mathrm{char}(k) = 0$ Vergleichssätze (die auf den GAGA-Sätzen von Serre beruhen), die – wie wir gleich sehen werden – die Bestimmung von $\pi_1(C)$ mit Hilfe topologischer Methoden erlauben.

Wir verallgemeinern die Situation zunächst noch etwas: Ist T ein abgeschlossenes, reduziertes Unterschema von C, so entsprechen die irreduziblen, etalen Überlagerungen von $C \setminus T$ in funktorieller Weise den irreduziblen, normalen Überlagerungen von C, die nur entlang T verzweigt sind. $\pi_1(C \setminus T)$ beschreibt also die Kategorie der außerhalb T unverzweigten, irreduziblen, normalen Überlagerungen von C.

Sei nun $k = \mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen, C eine irreduzibles, reduziertes, normales, projektives Schema über $\mathbb{C}$ und T ein abgeschlossenes Unterschema von C. Dann trägt $C(\mathbb{C})$ eine von $\mathbb{C}$ induzierte Topologie (die feiner als die Zariskitopologie ist). In dieser Topologie ist $C(\mathbb{C}) \setminus T$ wegweise zusammenhängend. Mit $\pi_1^{top}(C(\mathbb{C}) \setminus T)$ sei die Gruppe der Homotopieklassen von geschlossenen Wegen (mit festem Basispunkt) in $C(\mathbb{C}) \setminus T$, also die topologische Fundamentalgruppe von $C(\mathbb{C}) \setminus T$ bezeichnet. Dann erhält man die algebraische Fundamentalgruppe von $C \setminus T$ gerade als Komplettierung der topologischen Fundamentalgruppe bzgl. der Krulltopologie.

Hat C nun die Dimension 1 (d.h. C ist eine Kurve) und besteht $T = \{P_1, \ldots, P_n\}$ aus n verschiedenen Punkten von C, so ist $C(\mathbb{C})$ eine kompakte Riemannsche Fläche und $C(\mathbb{C}) \setminus T$ eine n-fach punktierte, orientierbare, offene

Fläche. In diesem Fall ist $\pi_1^{top}(C(\mathbb{C}) \setminus T)$ isomorph zu der Gruppe $\Gamma_{g,n}$, die $2g + n$ Erzeugende

$$a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, c_1, \ldots, c_n$$

mit der einzigen Relation

$$[a_1, b_1] \cdot \cdots \cdot [a_g, b_g] \cdot c_1 \cdot \cdots \cdot c_n = 1$$

hat. Dabei ist g das geometrische Geschlecht von $C \setminus T$, welches gleich dem topologischen Geschlecht von $C(\mathbb{C}) \setminus T$ ist. Die algebraische Fundamentalgruppe von $C \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$ wird also von diesen Elementen und dieser Relation als proendliche Gruppe erzeugt:

$$\pi_1(C \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}) = \hat{\Gamma}_{g,n}.$$

Dieses Ergebnis läßt sich auf Kurven über beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körpern k der Charakteristik 0 übertragen, indem man zeigt, daß $\pi_1(C \setminus T)$ invariant unter Basiswechseln der Form $\mathrm{Spec}(K) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ mit algebraisch abgeschlossenen Körpern k und K ist. Die Struktur der algebraischen Fundamentalgruppe haben wir also aus der topologischen Fundamentalgruppe gewonnen, und in der Tat ist kein Beweis bekannt, der ohne diese topologischen Überlegungen auskommt. Wie weit lassen sich diese Ergebnisse auf den Fall positiver Charakteristik übertragen?

Sei nun k ein algebraisch abgeschlossener Körper von positiver Charakteristik p und C eine irreduzible, projektive, nicht-singuläre Kurve über k. Um das obige Resultat in Charakteristik 0 zu nutzen, heben wir X zu einer Kurve $\mathcal{C}$ über dem diskreten Bewertungsring R der Charakteristik 0 (mit Quotientenkörper K und Restklassenkörper k) hoch derart, daß die abgeschlossene Faser von $\mathcal{C}$ isomorph zu C ist. Sei $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluß von K und $\bar{\mathcal{C}} := \mathcal{C}_K \times \mathrm{Spec}(\bar{K})$ die Konstantenerweiterung von $\mathcal{C}_K$ mit $\bar{K}$. Man hat dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\bar{\mathcal{C}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(\bar{K}) \arrow[d] \\
\mathcal{C}_K \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(K) \arrow[d] \\
\mathcal{C} \arrow[r] & \mathrm{Spec}(R) \\
\mathcal{C}_k \cong C \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Spec}(k). \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Besteht T wieder aus den n verschiedenen k-wertigen Punkten $P_1, \dots, P_n \in C$, so gibt es nach dem Henselschen Lemma (vgl. Satz 5) R-wertige Punkte $Q_1, \dots, Q_n$ von $\mathcal{C}$ derart, daß Q_i nach P_i spezialisiert. Sei $\bar{Q}_i := Q_i \times \mathrm{Spec}(\bar{K})$ gesetzt.

Für jede Primzahl p sei G_p die abgeschlossene Untergruppe von $\pi_1(C \setminus T)$, die von den p-Sylowuntergruppen erzeugt wird. Man setzt

$$\pi_1^{(p')}(C \setminus T) := \pi_1(C \setminus T)/G_p.$$

Es sei weiter $\mathfrak{E}^{(p')}(C \setminus T)$ die Teilkategorie von $\mathfrak{E}(C \setminus T)$, die aus den galoischen, unverzweigten, irreduziblen Überlagerungen von $C \setminus T$ von einem Grad prim zu p besteht. Dann entsprechen diese Überlagerungen den normalen Untergruppen von $\pi_1^{(p')}(C \setminus T)$ von endlichem Index. Es gilt nun der von Grothendieck stammende

Spezialisierungssatz. *Die Kategorien*

$$\mathfrak{E}^{(p')}(C \setminus \{P_1, \dots, P_n\}) \quad \textit{und} \quad \mathfrak{E}^{(p')}(\bar{\mathcal{C}} \setminus \{\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_n\})$$

sind äquivalent. Insbesondere hat man eine Isomorphie von proendlichen Gruppen

$$\pi_1^{(p')}(C \setminus \{P_1, \dots, P_n\}) \cong \pi_1^{(p')}(\bar{\mathcal{C}} \setminus \{\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_n\}).$$

Bemerkung. Tatsächlich gilt noch mehr: Bezeichnet $\pi_1^t(C \setminus T)$ die zahme Fundamentalgruppe, die man erhält, wenn man über T nur zahme Verzweigung zuläßt, so gibt es einen surjektiven Homomorphismus proendlicher Gruppen

$$\hat{\Gamma}_{g,n} \longrightarrow \pi_1^t(C \setminus \{P_1, \dots, P_n\}),$$

den sog. *Spezialisierungshomomorphismus*, der auf den prim-zu-p-Quotienten den obigen Isomorphismus induziert ([Mur, Chapter IX]).

1.3 Beweisskizze der Lösung des Hochhebeproblems

Das Hauptresultat dieser Arbeit wird mit Satz 6 die Lösung des obigen Hochhebeproblems sein. Wir werden das Problem auf das Hochheben von ebenen Kurven zurückführen. Betrachten wir zunächst einen Spezialfall:

1.3.1 Der nicht-singuläre Fall

Sei also $C \subset \mathbb{P}_k^2$ eine ebene, irreduzible, projektive, nicht-singuläre Kurve über k. Dann ist

$$C = \mathrm{Proj}\,(k[X,Y,Z]/(F))$$

definiert durch ein homogenes Polynom $F(X,Y,Z)$ mit Koeffizienten in k. Es sei d der Grad von F. Dann hat C das Geschlecht $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ ([Ful, 8.3, Prop. 5]). Sei nun $\Phi(X,Y,Z) \in R[X,Y,Z]$ ein Polynom vom Grad d, das modulo $\mathfrak{m}$ gerade F ergibt. Dann leistet die Kurve

$$\mathcal{C} := \operatorname{Proj}\left(R[X,Y,Z]/(\Phi)\right)$$

das Gewünschte. $\mathcal{C}$ ist nämlich eine glatte R-Kurve (die Flachheit von $R[X,Y,Z]/(\Phi)$ ist über dem Hauptidealring R gleichbedeutend mit Torsionsfreiheit, welche leicht zu sehen ist), $\mathcal{C}_k$ ist isomorph zu C über k, und $\mathcal{C}_K$ ist nicht-singulär (Jacobi-Kriterium) und hat das gleiche Geschlecht $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ wie C.

1.3.2 Der allgemeine Fall

Ist nun C_0 eine beliebige, irreduzible, nicht-singuläre, projektive Kurve über k, so besitzt C_0 ein birationales Modell

$$C = \operatorname{Proj}\left(k[X,Y,Z]/(F)\right),$$

welches eine ebene, projektive Kurve ist, die höchstens Knoten als Singularitäten besitzt ([Har, IV 3.11]). Wir wollen jetzt C auf die geforderte Weise hochheben. Geht man nun so naiv wie oben im nicht-singulären Fall vor und wählt irgendein Polynom Φ, dessen Reduktion modulo $\mathfrak{m}$ dann F ergibt, so werden im allgemeinen über den Knoten von C nicht-singuläre Punkte von $\mathcal{C}$ liegen. Das hat zur Folge, daß das geometrische Geschlecht von $\mathcal{C}$ größer ist als das von C. (Dies wird in Abschnitt 4 genauer erläutert, s. auch [Roq].) Wir betrachten ein einfaches Beispiel.

Beispiel 1. Sei $\operatorname{char}(k) = p > 3$. Der Punkt $(0,1)$ der ebene, affine Kurve

$$C' := \operatorname{Spec}\left(k[x,y]/(3x^2 - 3y^2 + 2y^3 + y^p)\right)$$

ist ein singulärer Punkt, weil die partiellen Ableitungen des definierenden Polynoms f in diesem Punkt verschwinden. Aber in der Hochhebung

$$\mathcal{C}' := \operatorname{Spec}\left(R[x,y]/(3x^2 - 3y^2 + 2y^3 + y^p)\right)$$

definiert durch die (naive) Hochhebung ϕ von f ist $(0,1)$ kein singulärer Punkt mehr, weil jetzt in Charakteristik 0

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(0,1) = p \neq 0$$

ist.

Wir werden sehen, daß man eine Kurve über k, die höchstens Knoten als Singularitäten besitzt, dennoch zu einer gleichartigen Kurve über R hochheben kann.

In Abschnitt 3 werden wir uns dazu zunächst detallierter mit solchen Kurven auseinandersetzen. Insbesondere werden wir sie als k-wertige Punkte auf einer geeigneten projektiven Varietät interpretieren. Die Punkte dieser Varietät werden dann in Abschnitt 4 mit einem höherdimensionalen Henselschen Lemma zu R-wertigen Punkten hochgehoben. Einen solchen R-wertigen Punkt kann man wieder als ebene, projektive Knotenkurve über R deuten. Die gesuchte Kurve ist schließlich die Normalisierung dieser Hochhebung.

Um einzusehen, daß sie die geforderten Eigenschaften besitzt, müssen wir insbesondere ihre Flachheit über R nachweisen. Dies geschieht, indem man die Kurve als Normalisierung der projektiven Geraden über R in einer geeigneten Körpererweiterung erhält. Im folgenden Abschnitt 2 werden wir sehen, daß solche Kurven flach sind.

2 Normalisierungen der projektiven Geraden

Sei A ein Integritätsbereich und K der Quotientenkörper von A. Der Funktionenkörper $K(\mathcal{S})$ eines ganzen Schemas $\mathcal{S}$ ist der lokale Ring am generischen Punkt von $\mathcal{S}$. Ist $\mathcal{S} = \mathbb{P}^n_A = \mathrm{Proj}(A[X_0, \ldots, X_n])$ der n-dimensionale projektive Raum über A, so ist

$$K(\mathbb{P}^n_A) = K(\mathbb{P}^n_K) = K(t_1, \ldots, t_n),$$

der rationale Funktionenkörper in den n Variablen $t_i = \frac{X_i}{X_0}$ $(i \neq 0)$ über K. Ist $n = 1$, so setzen wir $t := t_1 = \frac{X_1}{X_0}$ und identifizieren $K(\mathbb{P}^1_A) = K(t)$.

2.1 Dedekind-Weber-Äquivalenz über Körpern

Sei jetzt k ein beliebiger Körper. Eine Kurve über k ist ein reduziertes, separiertes k-Schema von endlichem Typ und reiner Dimension 1. Unter allen Kurven über dem Körper k gibt es nun eine gewisse Klasse von Kurven, die durch ihren Funktionenkörper schon (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt sind. Genauer hat man die Dedekind-Weber-Äquivalenz, die besagt, daß beiden folgenden Kategorien äquivalent sind:

(i) Die Kategorie $\mathfrak{C}_k$

- deren Objekte irreduzible, eigentliche, normale k-Kurven sind und
- deren Morphismen nicht-konstante k-Morphismen sind.

(ii) Die Kategorie $\mathfrak{F}_k$

- deren Objekte Funktionenkörper in einer Variablen über k sind und
- deren Morphismen k-Körperhomomorphismen sind.

Die Zuordnung

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{C}_k & \longrightarrow & \mathfrak{F}_k \\ C & \longmapsto & K(C) \end{array}$$

einer solchen Kurve zu ihrem Funktionenkörper vermittelt diese Äquivalenz. Speziell ist die projektive Gerade $\mathbb{P}^1_k = \mathrm{Proj}(k[X_0, X_1])$ eine solche Kurve. Sie ist das Modell des rationalen Funktionenkörpers $k(t)$ in einer Variablen über k.

Sei F eine endliche Körpererweiterung von $K(\mathbb{P}^1_k) = k(t)$ und $\widetilde{\mathbb{P}^1_k} \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$ die Normalisierung der projektiven Geraden in $F/k(t)$. $\mathbb{P}^1_k$ ist überdeckt von den offenen, affinen Teilmengen

$$D_+(X_0) \cong \mathrm{Spec}(k[t]) \quad \text{und} \quad D_+(X_1) \cong \mathrm{Spec}(k[t^{-1}]),$$

und man erhält $\mathbb{P}^1_k$, indem man diese affinen Varietäten entlang $\mathrm{Spec}(k[t, t^{-1}])$ verklebt. Die Normalisierung erhält man nun durch Normalisierung dieser affinen Teilmengen und entsprechendes Verkleben. Sei also R_t der ganze Abschluß von $k[t]$ in F und $R_{t^{-1}}$ der ganze Abschluß von $k[t^{-1}]$ in F. Dann ist

$$\widetilde{\mathbb{P}^1_k} = \mathrm{Spec}(R_t) \cup \mathrm{Spec}(R_{t^{-1}}),$$

entlang der Normalisierung von $\mathrm{Spec}(k[t, t^{-1}])$ in F verklebt. Insbesondere ist $\widetilde{\mathbb{P}^1_k} \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ flach, weil die k-Algebren R_t und $R_{t^{-1}}$ flach sind (sie sind sogar endlich erzeugt und torsionsfrei, also frei).

Sei nun C eine irreduzible, eigentliche Kurve über k und $\widetilde{C} \longrightarrow C$ ihre Normalisierung. Sei $f \in F := K(C)$ eine nicht-konstante, rationale Funktion auf C. Dann definiert f eine Einbettung von Funktionenkörpern einer Variablen über k

$$k(f) \hookrightarrow K(C)$$

und daher nach obigem Äquivalenzsatz auch einen endlichen, surjektiven Morphismus von k-Kurven

$$C_F \longrightarrow \mathbb{P}^1_k,$$

wobei C_F die normale Kurve ist, die unter der Dedekind-Weber-Äquivalenz dem Körper F entspricht. Damit ist C_F die Normalisierung von C, also $C_F \cong \widetilde{C}$. Sei jetzt $\widetilde{\mathbb{P}^1_k} \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$ die Normalisierung der projektiven Geraden in der Körpererweiterung $F/k(f)$. Dann gibt es einen (nach der Identifizierung $K(C_F) = F$ eindeutig bestimmten) Isomorphismus $\widetilde{f}$, der das folgende Diagramm kommutativ macht

$$\begin{tikzcd} C_F \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d] & \widetilde{\mathbb{P}^1_k} \arrow[d] \\ \mathbb{P}^1_k \arrow[r, equal] & \mathbb{P}^1_k. \end{tikzcd}$$

Wir erhalten die Normalisierung der k-Kurve C also als Normalisierung der projektiven Geraden über k in $K(C)/k(f)$. Inbesondere ist also die Normalisierung einer irreduziblen, eigentlichen Kurve über einem Körper k flach über $\mathrm{Spec}(k)$.

Frage: Gilt dies auch über einem beliebigen Integritätsbereich A anstelle eines Körpers k?

Wir wollen wie oben vorgehen und betrachten zunächst die Normalisierung $\widetilde{\mathbb{P}^1_A}$ der projektive Gerade $\mathbb{P}^1_A$ über A in einer endliche Erweiterung F ihres Funktionenkörpers $K(t)$. Sei $\mathcal{R}_t$ der ganze Abschluß von $A[t]$ in F und $\mathcal{R}_{t^{-1}}$ der ganze Abschluß von $A[t^{-1}]$ in F. Dann ist

$$\widetilde{\mathbb{P}^1_A} = \operatorname{Spec}(\mathcal{R}_t) \cup \operatorname{Spec}(\mathcal{R}_{t^{-1}}),$$

entlang des Spektrums des ganzen Abschlußes von $A[t, t^{-1}]$ in F verklebt. Uns stellen sich jetzt also die beiden folgenden Fragen:

1. Sind $\mathcal{R}_t$ und $\mathcal{R}_{t^{-1}}$ flache A-Moduln?

2. Kann man die Normalisierung einer A-Kurve $\mathcal{C}$ als Normalisierung der projektiven Geraden über A erhalten?

2.2 Dedekind-Weber-Äquivalenz über Bewertungsringen

Ist $A = \mathcal{O}_v$ ein Bewertungsring mit Bewertung v, so lassen sich beide Fragen in folgendem Sinne positiv beantworten (vgl. [G-M-P2] und [Gre]): Sei K der Quotientenkörper von $\mathcal{O}_v$ und sei $\mathcal{C}$ eine eigentliche, ganze, normale $\mathcal{O}_v$-Kurve mit Funktionenkörper $F := K(\mathcal{C})$. Die lokalen Ringe an den generischen Punkten der irreduziblen Komponenten der abgeschlossenen Faser von $\mathcal{C}$ dominieren den Ring $\mathcal{O}_v$. Sei $V = \{w_1, \ldots, w_n\}$ die Menge der dadurch definierten Fortsetzung von v auf F. Diese Fortsetzungen sind sog. *Konstantenreduktionen* (im Sinne von Deuring), d.h. die Erweiterungen der Restklassenkörper sind wieder Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1. Für $t \in F \setminus K$ sei V_t die Menge aller Fortsetzungen der von v induzierten Gaußbewertung (s. u.) auf $K(t)$ auf F. Ist $V = V_t$, so heißt t ein *Element mit der Eindeutigkeitseigenschaft für* V (vgl. [G-M-P1]).

Als Verallgemeinerung der oben beschriebenen Dedekind-Weber-Äquivalenz betrachtet man nun die beiden folgenden Katagorien:

(i) Die Kategorie $\mathfrak{C}_{\mathcal{O}_v}$

- deren Objekte eigentliche, ganze, normale $\mathcal{O}_v$-Kurven $\mathcal{C}$ sind, so daß $K = \operatorname{Quot}(\mathcal{O}_v)$ algebraisch abgeschlossen in $F = K(\mathcal{C})$ ist und
- deren Morphismen eigentliche surjektive $\mathcal{O}_v$-Morphismen sind.

(ii) Die Kategorie $\mathfrak{F}_{\mathcal{O}_v}$

- deren Objekte Paare (F, V) sind mit einem Funktionenkörper F in einer Variablen über K und einer endlichen Menge V von Konstantenreduktionen, die v fortsetzen, und
- deren Morphismen $(F, V) \longrightarrow (E, W)$ aus einer Einbettung von Körpern $F \hookrightarrow E$ bestehen, so daß dadurch W alle Fortsetzungen von V auf E enthält.

Unter gewissen Bedingungen an die Bewertung v (genauer muß v die *Local Skolem Property* besitzen, s. [G-M-P3]), die jedenfalls alle nichtarchimedischen Bewertungen von globalen Körpern und die Bewertungen Henselscher Bewertungsringe erfüllen, sind die Kategorien $\mathfrak{C}_{\mathcal{O}_v}$ und $\mathfrak{F}_{\mathcal{O}_v}$ kontravariant äquivalent ([Gre, Theorem 2]). Ein wichtiger Schritt im Beweis dieses Satzes ist es zu zeigen, daß jede $\mathcal{O}_v$-Kurve $\mathcal{C}$ aus $\mathfrak{C}_{\mathcal{O}_v}$ die Normalisierung von $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}_v}$ in $K(\mathcal{C})/K$ ist. Mit den obigen Bezeichnungen gilt genauer

$$\mathcal{C} \cong \operatorname{Spec}(\mathcal{R}_t) \cup \operatorname{Spec}(\mathcal{R}_{t^{-1}}),$$

wobei t ein Element mit der Eindeutigkeitseigenschaft für V ist ($V = \{w_1, \ldots, w_n\}$ wie oben), und $\mathcal{C}$ ist eine projektive, flache, normale, ganze, separierte $\mathcal{O}_v$-Kurve ([G-M-P2, Theorem 1.1 und Theorem 2.1]). Die Flachheit kann man zeigen, indem man den $\mathcal{O}_v$-Modul $\mathcal{R}_t$ (bzw. $\mathcal{R}_{t^{-1}}$) darstellt als induktiven Limes von freien Moduln.

Mit Blick auf unser Hochhebeproblem werden wir hier auf direktere Weise zeigen, daß die Normalisierung der projektiven Geraden über einem diskreten Bewertungsring in einer endlichen, separablen Körpererweiterung flach ist. Dazu werden wir – nach einigen Vorbereitungen – wie oben beschrieben vorgehen und $\mathcal{R}_t$ als induktiven Limes von gewissen $\mathcal{O}_v$-Moduln darstellen und diese als frei nachweisen.

2.3 Flachheit über diskreten Bewertungsringen

Ziel dieses Abschnitts ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 1. *Sei R ein diskreter Bewertungsring, $K :=$ Quot(R) und F eine endliche, separable Körpererweiterung des Funktionenkörpers $K(t)$ von $\mathbb{P}^1_R$. Dann ist die Normalisierung von $\mathbb{P}^1_R$ in F*

$$\widetilde{\mathbb{P}^1_R} \longrightarrow \operatorname{Spec}(R)$$

eine flache Kurve.

Wir betrachten zunächst einen noetherschen, ganzabgeschlossenen Integritätsbereich A mit Quotientenkörper K und einer endlichen, separablen Erweiterung F von K. Sei B der ganze Abschluß von A in F. Wir erinnern an einige elementare Gegebenheiten in dieser Situation. Jedes Element $f \in F$ läßt sich schreiben als

$$f = \frac{b}{a}, \quad b \in B, \quad a \in A,$$

denn nach Multiplikation der Gleichung

$$a_n f^n + \cdots + a_0 = 0, \quad a_i \in A, \quad a_n \neq 0,$$

für f über K mit a_n^{n-1} ergibt sich die Ganzheit von $a_n f$ über A, also $a_n f \in B$. Daher kann man auch aus jeder Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von F über K nach Multiplikation mit einem geeigneten Element aus A eine schon in B gelegene Basis von F über K erhalten.

Ein Element $f \in F$ ist genau dann ganz über A, wenn sein Minimalpolynom $p(X)$ Koeffizienten in A hat. Ist nämlich f Nullstelle eines normierten Polynoms $g(X) \in A[X]$, so wird $g(X)$ von $p(X)$ geteilt, und alle Nullstellen von p sind auch Nullstellen von g, also ganz über A. Dann sind aber auch die Koeffizienten von p als elementarsymmetrische Funktionen in den Nullstellen ganz über A.

Die Zuordnung $(x, y) \longmapsto \mathrm{Spur}_{F/K}(xy)$ definiert eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf dem K-Vektorraum F. Da mit einem Element $b \in B$ auch alle Konjugierten von b ganz über A sind, ist $\mathrm{Spur}_{F/K}(B) \subset A$.

Lemma 1. *B ist ein endlicher A-Modul.*

Beweis. Sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Basis von F/K in B und $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$ die zugehörige duale Basis bzgl. der von der Spur induzierten Bilinearform, d.h. $\mathrm{Spur}(\alpha_i^* \alpha_j) = \delta_{ij}$. Weil A noethersch ist, genügt es zu zeigen, daß

$$B \subset A\alpha_1^* + \cdots + A\alpha_n^*.$$

Ist aber $b \in B,\ b = \sum a_i \alpha_i^*,\ a_i \in K$, so hat man

$$a_j = \sum_i a_j \delta_{ij} = \sum_i a_j \,\mathrm{Spur}(\alpha_i^* \alpha_j) = \mathrm{Spur}\left(\sum_i a_i \alpha_i^* \alpha_j\right) = \mathrm{Spur}(b\alpha_j) \in A,$$

also $b \in A\alpha_1^* + \cdots + A\alpha_n^*$. □

Sei nun $A = \mathcal{O}_v$ ein diskreter Bewertungsring mit zugehöriger Bewertung v, K sein Quotientenkörper und F/K ein Funktionenkörper in einer Variablen über K. Es sei $t \in F$ transzendent über K derart, daß F eine endliche, separable Erweiterung von $K(t)$ ist. Es bezeichne R_t den ganzen Abschluß von $K[t]$ in F und $\mathcal{R}_t$ den ganzen Abschluß von $\mathcal{O}_v[t]$ in F.

Wir setzen v auf $K(t)$ durch die Gaußbewertung v_t fort:

$$v_t\left(\frac{a_r t^r + \cdots + a_0}{b_s t^s + \cdots + b_0}\right) := \min_{0\le i\le r} v(a_i) - \min_{0\le j\le s} v(b_j).$$

Daß v_t tatsächlich eine Bewertung ist, besagt gerade der Satz von Gauß über den Inhalt von Polynomen über faktoriellen Ringen. Sei S_t der ganze Abschluß von $\mathcal{O}_{v_t}$ in F.

Es sei V die (endliche) Menge von Fortsetzungen von v_t auf F. Die durch V bestimmte inf-Norm w auf F ist definiert durch

$$w(x) := \inf_{v\in V} v(x), \qquad \textit{für } x \in F.$$

Wir setzen

$$\mathcal{O}_w := \{x \in F \mid w(x) \ge 0\}.$$

Da der ganze Abschluß eines Ringes in einem Körper gleich dem Durchschnitt aller den Ring enthaltenden Bewertungsringe dieses Körpers ist, so ist

$$\mathcal{O}_w = \bigcap_{v\in V} \mathcal{O}_v = S_t.$$

Sei jetzt C_F die dem Funktionenkörper F/K unter der Dedekind-Weber-Äquivalenz zugeordnete, irreduzible, eigentliche, normale Kurve über K (das Modell von F/K). Für jeden Divisor $D \in \mathrm{Div}(C_F)$ hat man dann den endlich-dimensionalen K-Vektorraum

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(D) &:= \{f \in F \mid (f) + D \ge 0\}\\ &= \{f \in F \mid v_P(f) + v_P(D) \ge 0 \quad \text{für alle} \quad P \in C_F\}\end{aligned}$$

aus dem man für alle $m \in \mathbb{N}$ den $\mathcal{O}_v$-Modul $\mathcal{L}_w(mD) := \mathcal{L}(mD) \cap \mathcal{O}_w$ erhält. Wir beschreiben jetzt den ganzen Abschluß des Polynomringes $\mathcal{O}_v[t]$ in F mit Hilfe dieser Moduln:

Lemma 2. *Sei $D := (t)_\infty$ der Poldivisor von t. Dann gilt:*

(1) $\mathcal{R}_t = R_t \cap \mathcal{O}_w$,

(2) $R_t = \bigcup_{m\ge 1} \mathcal{L}(mD)$,

und daher $\mathcal{R}_t = \bigcup_{m\ge 1} \mathcal{L}_w(mD)$.

Beweis. Für (1) ist die Inklusion

$$\mathcal{R}_t \subset R_t \cap S_t = R_t \cap \mathcal{O}_w$$

klar. Ist umgekehrt $x \in R_t \cap \mathcal{O}_w$ und

$$X^n + a_{n-1}(t)X^{n-1} + \cdots + a_1(t)X + a_o(t)$$

sein Minimalpolynom über $K(t)$, so gilt für die Koeffizienten

$$a_i(f) \in K[t] \cap \mathcal{O}_{v_t} = \mathcal{O}_v[t].$$

Der Poldivisor D von t ist definiert als

$$(t)_\infty = \sum_{P \in \operatorname{supp}((t)_\infty)} -v_P(t),$$

wobei $\operatorname{supp}((t)_\infty) = \{P \in C_F \mid v_P(t) < 0\}$ die (endliche) Polstellenmenge von t ist. Ein Element $f \in F$ liegt also genau dann in $\mathcal{L}(mD)$, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & v_P(f) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad P \in C_F \setminus \operatorname{supp}((t)_\infty) \\ \text{(ii)} & v_P(f) \geq m\, v_P(t) \quad \text{für alle} \quad P \in \operatorname{supp}((t)_\infty). \end{array}$$

Da die zweite Bedingung für große m immer erfüllt ist, gilt

$$\begin{aligned} f \in \bigcup_{m \geq 1} \mathcal{L}(mD) \quad &\Longleftrightarrow \quad f \in \mathcal{O}_P \quad \forall\, P \notin \operatorname{supp}((t)_\infty) \\ &\Longleftrightarrow \quad f \in \bigcap_{t \in \mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P. \end{aligned}$$

Die Ringe $\mathcal{O}_P$, die t enthalten, sind aber genau die Bewertungsringe von F/K die $K[t]$ enthalten. Also ist ihr Durchschnitt gleich R_t. □

Lemma 2 verweist uns auf das Studium der Moduln $\mathcal{L}_w(mD)$. Unser Ziel ist nun

Lemma 3. *Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{L}_w(mD)$ ist ein endlicher $\mathcal{O}_v$-Modul und somit (als torsionsfreier Modul über dem Hauptidealring $\mathcal{O}_v$) frei.*

Zum Beweis von Lemma 3 holen wir etwas weiter aus. Sei $f \in F$ transzendent über K. Dann definiert f einen gleichnamigen, endlichen, surjektiven Morphismus von Kurven $C_F \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$ und dieser einen Homomorphismus der

Divisorengruppen $f^* : \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1_K) \longrightarrow \mathrm{Div}(C_F)$. Unter dem Grad von f verstehen wir den Grad des Morphismus f, also den Grad der Körpererweiterung der Funktionenkörper der Kurven:

$$\deg f = [K(C_F) : K(\mathbb{P}^1_K)] = [F : K(f)].$$

Es ist $(f) = (f)_0 - (f)_\infty = f^*((0) - (\infty))$ und $\deg f = \deg(f)_0 = \deg(f)_\infty$, wobei deg zuletzt den Grad der Divisoren $(f)_0$ bzw. $(f)_\infty$ bezeichnet. Für ein Polynom $f(t)$ bezeichne $\deg_t f$ den Grad von f als Polynom in t.

Lemma 4. *Sei $t \in F$ transzendent über K und $f = f(t) = \frac{g(t)}{h(t)}$ eine rationale Funktion in t mit teilerfremden Polynomen g und h. Dann gilt:*

$$[K(t) : K(f)] = \max\{\deg_t g, \deg_t h\}.$$

Beweis. Sei zunächst $q(t) = \sum a_i t^i$ irgendein Polynom in t. Dann ist für alle $P \in C_F$

$$v_P(q) \geq \min_i v_P(a_i t^i) = \min_i i v_P(t).$$

Daher folgt aus $v_P(t) \geq 0$ auch $v_P(q) \geq 0$. Ist dagegen $v_P(t) < 0$, so sind die Werte $i v_P(t)$ für alle i mit $a_i \neq 0$ verschieden, und daher gilt in obiger Ungleichung Gleichheit:

$$v_P(q) = \min_i i v_P(t) = (\deg_t q) v_P(t).$$

Daher ist $(q)_\infty = (\deg_t q)(t)_\infty$, und die Nullstellen von q sind verschieden von den Polstellen von t. Insbesondere ist

$$(f) = (g)_0 - (h)_0 - (\deg_t g - \deg_t h)(t)_\infty.$$

Sei nun o. E. $\deg_t g \geq \deg_t h$ (betrachte andernfalls $1/f(t)$). Nach Voraussetzung haben g und h keine gemeinsamen Nullstellen, und wir haben gerade gesehen, daß alle diese Nullstellen von den Polstellen von g und h verschieden sind. Daher ist $\deg(f)_0 = \deg(g)_0$ und somit

$$[K(t) : K(f)] = \frac{[F : K(f)]}{[F : K(t)]} = \frac{\deg f}{\deg t} = \frac{\deg(g)_0}{\deg(t)_0} = \frac{\deg(g)_\infty}{\deg(t)_\infty} = \deg_t g. \quad \square$$

Für ein Polynom $f(t)$ ist also insbesondere $\deg f = (\deg_t f)(\deg t)$.

Beweis von Lemma 3. Sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Basis von F über $K(t)$ und $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$ die duale Basis. Da $\mathcal{O}_v[t]$ noethersch ist, gilt nach Lemma 1

$$\mathcal{L}_w(mD) \subset \mathcal{R}_t \subset \mathcal{O}_v[t]\alpha_1^* + \cdots + \mathcal{O}_v[t]\alpha_n^*.$$

Sei also $f = p_1(t)\alpha_1^* + \cdots + p_n(t)\alpha_n^* \in \mathcal{L}_w(mD)$ mit $p_i \in \mathcal{O}_v[t]$. Wir zeigen, daß es eine von f unabhängige Konstante $c = c(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, m)$ gibt, die den Grad aller Polynome $p_i(t)$ beschränkt.

Zunächst gilt für alle j:

$$\operatorname{Spur}(f\alpha_j) = \operatorname{Spur}\left(\sum_i p_i(t)\alpha_i^*\alpha_j\right) = \sum_i p_i(t)\operatorname{Spur}(\alpha_i^*\alpha_j) = p_j(t)$$

und daher $p_j = \sum_\sigma \sigma(f\alpha_j)$, wobei σ die verschiedenen K-Einbettungen von F in einen algebraischen Abschluß von $K(t)$ durchläuft. Aufgrund des vorherigen Lemmas genügt es nun zu zeigen, daß der Grad von p_j als rationale Funktion beschränkt ist. Dazu müssen nur die n Summanden $\sigma(f\alpha_j)$ als beschränkt nachgewiesen werden.

Da die Ungleichung $(f) + mD \geq 0$ stets an allen Stellen, an denen f definiert ist, erfüllt ist, gilt

$$f \in \mathcal{L}(mD) \iff (f)_\infty \leq mD.$$

Daher ist der Grad von f beschränkt: $\deg f = \deg(f)_\infty \leq m\deg(D)$ und damit auch der Grad von $\sigma(f)$. Ist $\deg\sigma(f) \leq c'(\sigma, m)$, so gilt schließlich

$$\deg\sigma(f\alpha_j) \leq c' + \max_i \deg\sigma(\alpha_i) \quad \text{für alle} \quad j = 1, \ldots, n.$$

f ist also in dem endlichen $\mathcal{O}_v$-Modul $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{c} t^j\alpha_i^*\mathcal{O}_v$ enthalten. □

Bemerkung 1. Lemma 3 besitzt folgende Verallgemeinerung: Sei $\mathcal{O}_v$ ein (beleibiger) Bewertungsring und V eine Menge von Konstantenreduktionen, die *eigentlich* ist (im Sinne von [Gre, Definition 1.1]). Ist dann E ein endlichdimensionaler K-Untervektorraum von F, so gilt

$$\dim_K(E) = \dim_{Kv}(Ev),$$

wobei Kv der Restklassenkörper von K bzgl. v ist und $Ev := (E \cap \mathcal{O}_w + \mathfrak{m}_v\mathcal{O}_w)/\mathfrak{m}_v\mathcal{O}_w$ mit $\mathfrak{m}_v := \{x \in F \mid w(x) > 0\}$ und w die inf-Norm. Insbesondere ist dann $E \cap \mathcal{O}_v$ ein endlicher $\mathcal{O}_v$-Modul.

Wir kommen nun zum

Beweis von Satz 1. Der $\mathcal{O}_v$-Modul

$$\mathcal{R}_t = \bigcup_{m\geq 1} \mathcal{L}_w(mD) = \varinjlim \mathcal{L}_w(mD)$$

ist als induktiver Limes von freien Moduln flach.

Alle bisherigen Überlegungen gelten genauso für t^{-1} an Stelle von t, da wir nur vorausgesetzt haben, daß t transzendent über K ist und $F/K(t)$ eine separable Erweiterung ist. Also ist auch der ganze Abschluß $\mathcal{R}_{t^{-1}}$ von $\mathcal{O}_v[t^{-1}]$ in F ein flacher $\mathcal{O}_v$-Modul und damit

$$\widetilde{\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}_v}} = \operatorname{Spec}(\mathcal{R}_t) \cup \operatorname{Spec}(\mathcal{R}_{t^{-1}}),$$

entlang $(\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_v[t, t^{-1}]))\tilde{}$ verklebt, flach über $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_v)$. $\square$

Bemerkung 2. Wir haben eingangs schon erwähnt, daß man mehr über die zu einer eigentlichen Menge von Konstantenreduktionen V assoziierten $\mathcal{O}_v$-Kurve

$$\operatorname{Spec}(\mathcal{R}_t) \cup \operatorname{Spec}(\mathcal{R}_{t^{-1}})$$

(t ein Element mit der Eindeutigkeitseigenschaft für V) weiß. In der Tat gilt mit den obigen Bezeichnungen ([G-M-P2, Theorem 1.1])

$$\operatorname{Spec}(\mathcal{R}_t) \cup \operatorname{Spec}(\mathcal{R}_{t^{-1}}) \cong \operatorname{Proj} \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{L}_w(mD).$$

Aber auch über den ganzen Abschluß $\mathcal{R}_t$ des Ploynomringes $\mathcal{O}_v[t]$ über einem (beliebigen) Bewertungsring $\mathcal{O}_v$ in einer endlichen, separablen Erweiterung $F/K(t)$ ist mehr bekannt: Nach Lemma 1 ist $\mathcal{R}_t$ ein endlicher $\mathcal{O}_v[t]$-Modul. Dies ist nach [Kna, Theorem 3.1] (s. auch [G-M-P2, Lemma 1.2]) bereits äquivalent dazu, daß $\mathcal{R}_t$ ein freier $\mathcal{O}_v[t]$-Modul vom Rang $[F : K(t)]$ ist. Daraus folgt insbesondere die Flachheit von $\mathcal{R}_t$ über $\mathcal{O}_v$.

3 Ebene Knotenkurven

3.1 Knoten

In diesem Abschnitt soll der Begriff des Knotens auf einer Kurve erläutert und charakterisiert werden.

Wir betrachten zunächst ebene, affine Kurven über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Ist $f \in k[x,y]$ ein Polynom, so bezeichnen wir die durch die Gleichung $f = 0$ definierte ebene, affine Kurve mit

$$C_f := \operatorname{Spec}\left(k[x,y]/(f)\right).$$

Sei $P = (a,b)$ ein Punkt von $C := C_f$ und $T(x,y) := (x+a, y+b)$ die Translation, die den Nullpunkt in den Punkt P verschiebt. Sei $f^T(x,y) := f(x+a, y+b)$ das Polynom, das die verschobene Kurve C_{f^T} definiert. Wir schreiben

$$f^T = f_r + f_{r+1} + \cdots + f_d, \quad f_r \neq 0,$$

mit den homogenen Komponenten f_i vom Grad i und nennen die Linearfaktoren von f_r die *Tangenten von C im Punkt P*. Die Zahl

$$\mu_P(C) := \mu_{(0,0)}(C_{f^T}) := r$$

heißt die *Multiplizität von P auf C*. Ein beliebiger Punkt Q liegt genau dann auf C, wenn $\mu_Q(C) > 0$. Ferner sind die Punkte Q mit $\mu_Q(C) > 1$ genau die singulären Punkte von C. Ein *Doppelpunkt* ist ein Punkt der Multiplizität 2. Ein Doppelpunkt heißt *gewöhnlich*, wenn zusätzlich die beiden Tangenten verschieden sind, d.h. f_2 zerfällt in teilerfremde Linearfaktoren. Gewöhnliche Doppelpunkte heißen auch *Knoten*. Ist $f^T = \prod g_i$ die Faktorisierung von f^T in seine irreduziblen Komponenten, so ist $\mu_P(C_f) = \sum \mu_{(0,0)}(C_{g_i})$.

Es bezeichne $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}$ die (formale) partielle Ableitung von f nach x, $f_{xy} := (f_x)_y$. Wir werden die folgende Charakterisierung von Knoten benutzen:

Lemma 5. *Sei P ein Doppelpunkt auf der Kurve $C = C_f$. Dann ist P genau dann ein Knoten, wenn $f_{xy}(P)^2 \neq f_{xx}(P)\, f_{yy}(P)$.*

Beweis. Die obige Diskussion zeigt, daß wir $P = (0,0)$ annehmen dürfen. Sei also

$$f = f_2 + \cdots + f_d, \quad f_i \text{ homogen vom Grad } i, \quad f_2 \neq 0.$$

Wir schreiben

$$f_2 = (a_1 x + b_1 y)\,(a_2 x + b_2 y), \quad a_i \text{ oder } b_i \neq 0, \quad i = 1,2.$$

Dann ist per Definition P genau dann ein Knoten, wenn $(a_1, b_1) \neq \lambda(a_2, b_2)$ für alle $\lambda \in k^*$, d.h. $a_1b_2 \neq a_2b_1$.

Andererseits verschwinden alle 2. Ableitungen der f_i im Punkt $P = (0, 0)$ für alle $i \geq 3$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} f_{xy}(P)^2 \neq f_{xx}(P)\, f_{yy}(P) &\iff (f_2)_{xy}(P)^2 \neq (f_2)_{xx}(P)\, (f_2)_{yy}(P) \\ &\iff (a_1b_2 + a_2b_1)^2 \neq 2a_1a_2 \cdot 2b_1b_2 \\ &\iff (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \neq 0. \qquad \square \end{aligned}$$

Das typische Beispiel eines Knotens ist der Punkt $(0, 0)$ auf der (reduziblen) Kurve

$$C_{xy} = \operatorname{Spec}(k[x, y]/(xy)).$$

Das folgende Lemma zeigt, daß die Eigenschaft Knoten zu sein lokal ist, d.h. nur von der Komplettierung des lokalen Ringes in diesem Punkt abhängt.

Lemma 6. *Ein Punkt P der ebenen, affinen Kurve C ist genau dann ein Knoten, wenn*

$$\hat{\mathcal{O}}_{C,P} \cong k[[x, y]]/(xy)$$

als k-Algebren.

Beweis. Sei o. E. $P = (0, 0) \in C = C_f$. Das C definierende Polynom f sei von der Form $f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y) + \cdots + f_d(x, y)$, f_i homogen vom Grad i. Der Punkt $P \in C$ ist genau dann ein Knoten, wenn $f_1 = 0$ ist und f_2 in teilerfremde Linearfaktoren l_1 und l_2 zerfällt.

Sei P ein Knoten. Wir haben die kompletten, lokalen Ringe

$$\widehat{\mathcal{O}}_{C,P} = k[[x, y]]/(f) \quad \text{und} \quad \widehat{\mathcal{O}}_{C_{xy},(0,0)} = k[[x, y]]/(xy)$$

als isomorph nachzuweisen. Dazu konstruieren wir zunächst schrittweise formale Potenzreihen

$$\begin{aligned} g &= l_1 + g_2 + g_3 + \ldots \\ h &= l_2 + h_2 + h_3 + \ldots \end{aligned}$$

mit $\deg g_i = \deg h_i = i$ derart, daß $f = gh$ in $k[[x, y]]$ ist. Um g_2 und h_2 zu bestimmen hat man die Gleichung

$$h_2l_1 + g_2l_2 = f_3$$

zu lösen. Dies ist möglich, weil l_1 und l_2 das maximale Ideal $(x, y) \subset k[[x, y]]$ erzeugen. Aus dem selben Grund kann man g_3 und h_3 so finden, daß

$$h_3l_1 + g_3l_2 = f_4 - g_2h_2.$$

Im Grad n schließlich ist die Gleichung

$$h_{n-1}l_1 + g_{n-1}l_2 = f_n - \sum_{i+j=n} g_i h_j \qquad (f_n = 0 \text{ für } n > d)$$

in h_{n-1} und g_{n-1} zu lösen.

Es ist also $\widehat{\mathcal{O}}_{C,P} = k[[x,y]]/(gh)$. Weil g und h mit linear unabhängigen, linearen Termen beginnen, gibt es einen Automorphismus von $k[[x,y]]$, der g auf x und h auf y abbildet. Dieser induziert einen Isomorphismus

$$k[[x,y]]/(gh) \cong k[[x,y]]/(xy). \tag{1}$$

Sei nun umgekehrt ein solcher Isomorphismus gegeben. Wir bemerken zunächst, daß f nicht irreduzibel sein kann in $k[[x,y]]$, denn dann wäre (f) ein Primideal (weil $k[[x,y]]$ ein faktorieller Ring ist) und somit $k[[x,y]]/(f) \cong k[[x,y]]/(xy)$ nullteilerfrei, was ja offensichtlich nicht der Fall ist. Es ist also $f = gh$ mit formalen Potenzreihen $g, h \in k[[x,y]]$, die beide keine Einheiten sind, also mit linearen Termen beginnen:

$$\begin{aligned} g &= g_1 + g_2 + g_3 + \dots \\ h &= h_1 + h_2 + h_3 + \dots \end{aligned}$$

mit $\deg g_i = \deg h_i = i$. Daraus folgt, daß $f_1 = g_0 h_1 + h_0 g_1 = 0$ ist.

Nehmen wir nun an es wäre $f_2 = l^2$ mit einer Linearform $l \in k[x,y]$. Dann gibt es eine zu l teilerfremde Linearform $q \in k[x,y]$. Nach einem linearen Koordinatenwechsel können wir $l(x,y) = x$ und $q(x,y) = y$ annehmen. Der Isomorphismus (1) induziert dann einen Isomorphismus

$$k[[x,y]]/(f,y) \cong k[[x,y]]/(xy,y) \cong k[[x,y]]/(y) \cong k[[x]].$$

Nun ist aber $k[x,y]/(f,y)$ ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum (weil $f = x^2 + f_3(x,y) + \cdots + f_d(x,y)$ und y teilerfremd sind) und daher auch die Komplettierung $k[[x,y]]/(f,y)$. Für $k[[x]]$ ist dies aber offenbar nicht der Fall, im Widerspruch zu obigem Isomorphismus. $\square$

Bemerkung 3. Allgemeiner hängt die Multiplizität eines Punktes auf einer Kurve nur vom lokalen Ring in diesem Punkt ab ([Ful, 3.2, Thm. 2]). Daher ist die Zahl $\mu_P(C)$ auch für eine projektive Kurve C wohldefiniert.

Geometrisch sieht eine ebene, affine Kurve in der Nähe eines Knotens also so aus wie der Schnitt zweier Geraden. Diese Charakterisierung veranlaßt uns zur folgenden

Definition 1. Ist C eine Kurve über einem beliebigen Körper k und $s : \mathrm{Spec}(k) \longrightarrow C$ ein k-rationaler Punkt, so heiße s ein *k-rationaler Knoten von C*, falls $\widehat{\mathcal{O}}_{C,s} \cong k[[x,y]]/(xy)$.

Ist $\mathcal{C}$ eine Kurve über einem Ring R und $s : \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow \mathcal{C}$ ein R-rationaler Punkt, so heiße s ein *R-rationaler Knoten von* $\mathcal{C}$, falls für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ der zugehörige $\kappa(\mathfrak{p})$-rationale Punkt $s_{\mathfrak{p}} : \mathrm{Spec}(\kappa(\mathfrak{p})) \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ ein $\kappa(\mathfrak{p})$-rationaler Knoten in der Faser $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ von $\mathcal{C}$ über $\mathfrak{p}$ ist. (Dabei ist $\kappa(\mathfrak{p})$ der Restklassenkörper in $\mathfrak{p}$.)

Eine Kurve heiße schließlich eine *m-fache Knotenkurve*, falls ihre einzigen Singularitäten m Knoten sind.

Bemerkung 4. Dem Beweis von Lemma 6 entnehmen wir, daß wann immer eine ebene, affine Kurve $C = C_f$ über einem beliebigen Körper durch eine Gleichung $f = 0$ gegeben ist und f_2 in teilerfremde Linearformen zerfällt, $P = (0,0)$ ein Knoten von C_f ist.

Beispiel 2. Sei R zunächst ein beliebiger Ring und $t \in R$. Wir betrachten die ebene, affine Kurve $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{f_t} = \mathrm{Spec}(R[x,y]/(f_t))$, definiert durch

$$f = f_t = x^2 + txy - y^2 - y^3.$$

Die partiellen Ableitungen von f sind

$$\begin{array}{lll} f_x = 2x + ty, & & f_y = tx - 2y - 3y^2, \\ f_{xx} = 2, & f_{xy} = t, & f_{yy} = -2 - 6y. \end{array}$$

Der Punkt $(0,0)$ ist in jedem Fall ein singulärer Punkt von $\mathcal{C}$. Um zu prüfen, ob er ein Knoten ist, wollen wir Lemma 5 heranziehen und berechnen

$$f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) = -4 \quad \text{und} \quad f_{xy}(0,0)^2 = t^2.$$

Der Punkt $(0,0)$ ist also genau dann ein Knoten, wenn in allen Fasern von $\mathcal{C}$

$$t^2 \neq -4$$

gilt. Konkreter:

a) $R = \mathbb{Z}$.

Dann gilt für alle $t \in \mathbb{Z}$, daß $(0,0)$ kein Knoten von $\mathcal{C}$ ist, weil es zu jedem $t \in \mathbb{Z}$ eine Prinzahl p mit $t^2 \equiv -4 \pmod{p}$ gibt, d.h. in mindestens einer Faser von $\mathcal{C}$ ist $(0,0)$ kein Knoten.

b) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Dann ist $(0,0)$ genau dann ein Knoten, wenn $t = \pm\sqrt{-5}$ ist. Es gilt nämlich genau dann $t^2 \not\equiv -4 \pmod{p}$ für alle Primzahlen p, wenn $t^2+4 = \pm 1$ ist, d.h. wenn $t = \pm\sqrt{-5}$ ist (beachte $\sqrt{-3} \notin R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$).

Beispiel 3. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p > 3$. Über k betrachten wir die ebene, affine Kurve C_f mit

$$f = 3x^2 - 3y^2 + 2y^3 + y^p$$

aus Beispiel 1 und finden die partiellen Ableitungen

$$\begin{array}{lll} f_x = 6x, & & f_y = -6y(1-y), \\ f_{xx} = 6, & f_{xy} = 0, & f_{yy} = -6 + 12y. \end{array}$$

C_f hat genau zwei singuläre Punkte, nämlich $(0,0)$ und $(0,1)$. Beide sind Knoten, da

$$\begin{array}{l} f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) = 6 \cdot (-6) \neq 0 = f_{xy}(0,0)^2 \quad \text{und} \\ f_{xx}(0,1)f_{yy}(0,1) = 6 \cdot 6 \neq 0 = f_{xy}(0,1)^2. \end{array}$$

C_f ist also eine 2-fache Knotenkurve.

3.2 Lineare Systeme von Kurven

Gegeben sei eine natürliche Zahl d. Wir interessieren uns für die Menge V_d aller ebenen, projektiven Kurven vom Grad d über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k.

Wir zählen zunächst, wieviele Monome vom Grad d es gibt. In zwei Variablen sind dies gerade die Monome der Form $M = X^{d-i}Y^i$, $i = 0, \dots, d$, also $d + 1$ Stück. In drei Variablen haben sie die Gestalt $M = X^{d-i}F_i(Y, Z)$, $i = 0, \dots, d$, wobei die F_i Monome in Y, Z vom Grad i sind. Es gibt also $\sum_{i=0}^{d}(i + 1) = \frac{1}{2}(d + 1)(d + 2) =: N$ Stück.

Sei nun $M_1, \dots, M_N$ eine fest gewählte Ordnung der Menge der Monome in den Variablen X, Y, Z. Wir betrachten Paare (C, ι) mit einer Kurve C und einer abgeschlossenen Immersion $\iota : C \hookrightarrow \mathbb{P}_k^2$, so daß

$$\iota(C) = \mathrm{Proj}(k[X, Y, Z]/(F)) \quad \text{mit} \quad F \in k[X, Y, Z].$$

Zwei solche Paare (C, ι) und (C', ι') betrachten wir als gleich, wenn sie die gleiche eingebettete Kurve liefern, wenn also $\iota(C) = \iota'(C')$ ist.

Das homogene Polynom F hat die Form

$$F(X, Y, Z) = \sum_{i=1}^{N} a_i M_i(X, Y, Z), \quad a_i \in k \text{ nicht alle } 0.$$

Die eingebettete Kurve $\iota(C)$ ist also bestimmt durch die Auswahl von Elementen $a_1, \dots, a_N$ aus k. Dabei liefern zwei Systeme $(a_1, \dots, a_N)$ und

$(a'_1, \ldots, a'_N)$ genau dann die gleiche eingebettete Kurve, wenn es ein $\lambda \in k^*$ gibt, so daß $(a_1, \ldots, a_N) = \lambda(a'_1, \ldots, a'_N)$. Mit anderen Worten entspricht jedem Paar (C, ι) in eineindeutiger Weise ein Punkt im projektiven Raum der Dimension $N - 1 = \frac{1}{2}d(d+3)$. Auf diese Weise können wir V_d mit $\mathbb{P}_k^{N-1}$ identifizieren.

Definition 2. Eine Untervarietät $V \subset \mathbb{P}_k^{N-1}$ heiße *linear*, falls es Linearformen $L_1, \ldots, L_r$ in den Unbestimmten $a_1, \ldots, a_N$ gibt, so daß V von der Form $V = V(L_1, \ldots, L_r)$ ist.

Eine lineare Untervarietät von $\mathbb{P}_k^{N-1}$, die dadurch entsteht, daß wir weitere Bedingungen an die Paare (C, ι) stellen, heiße ein *lineares System von (ebenen, projektiven) Kurven.*

Beispiel 4. Die Menge $V_d(P)$ aller ebenen, projektive Kurven, auf denen der Punkt $P \in \mathbb{P}_k^2$ liegt, bildet eine Hyperebene in $\mathbb{P}_k^{N-1}$. Ist nämlich $P = (x, y, z)$, so liegt P genau dann auf der zu $(a_1, \ldots, a_N)$ gehörenden Kurve, wenn $\sum a_i M_i(x, y, z) = 0$ ist.

Seien nun allgemeiner Punkte $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{P}_k^2$ und nicht-negative ganze Zahlen $r_1, \ldots, r_n$ gegeben. Wir bezeichnen mit $V_d(r_1P_1, \ldots, r_nP_n)$ die Teilmenge aller Kurven C aus V_d, für die $\mu_{P_i}(C) \geq r_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt.

Satz 2. *Ist $d \geq (\sum r_i) - 1$, so bildet $V_d(r_1P_1, \ldots, r_nP_n)$ ein lineares System von Kurven der Dimension $N - 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r_i(r_i + 1)$.*

Beweis. Sei zunächst $n = 1$ und $r := r_1$. Wir können o. E. $P = (0, 0, 1)$ annehmen, denn ein projektiver Koordinatenwechsel auf $\mathbb{P}_k^2$ induziert einen projektiven Koordinatenwechsel auf $\mathbb{P}_k^{N-1}$. Sei (C, ι) eine ebene, projektive Kurve definiert durch ein homogenes Polynom F, das wir schreiben als

$$F = \sum F_i(X, Y) Z^{d-i}, \quad \deg F_i = i.$$

Nun ist $\mu_P(C) \geq r$ genau dann, wenn $F_0 = F_1 = \cdots = F_{r-1} = 0$. Wir zählen die Monome $X^i Y^j Z^k$ mit $i + j < r$ zu genau $1 + 2 + \cdots + r = \frac{1}{2}r(r+1)$. Daraus folgt die Aussage für $n = 1$ und die Ungleichung

$$\dim V_d(r_1P_1, \ldots, r_nP_n) \geq N - 1 - \sum \frac{1}{2} r_i(r_i + 1)$$

im allgemeinen Fall.

Wir zeigen nun durch Induktion nach $m := (\sum r_i) - 1$ die Unabhängigkeit der Bedingungen und damit den Satz. Für $m = 0$ ist $n = r_1 = 1$, und es liegt gerade der Hyperebenenfall aus Beispiel 4 vor.

Sei jetzt $m \geq 1$. Sind alle $r_i = 1$, so genügt es zu zeigen, daß die Inklusionen

$$V_d \supset V_d(P_1) \supset V_d(P_1, P_2) \supset \cdots \supset V_d(P_1, \ldots, P_n)$$

alle strikt sind. Wählt man aber Linearformen $L_i \in k[X, Y, Z]$, die die Punkte P_i als Nullstelle haben, nicht aber P_j ($\forall\ j \neq i$), sowie eine Linearform L_0, die keinen der Punkte P_i enthält, so ist

$$F := L_1 \cdot \cdots \cdot L_{n-1} L_0^{d-n+1} \in V_d(P_1, \ldots, P_{n-1}) \setminus V_d(P_1, \ldots, P_n).$$

Sei jetzt $r = r_1 > 1$ und $P = P_1 = (0, 0, 1)$. Wir setzen

$$V_0 := V_d((r-1)P, r_2 P_2, \ldots, r_n P_n)$$

und schreiben für $F \in V_0$

$$F_*(X, Y) := F(X, Y, 1) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i X^i Y^{r-1-i} + H(X, Y), \quad \deg H \geq r.$$

Mit $V_i := \{F \in V_0 \mid a_j = 0 \quad \text{für alle} \quad j < i\}$ sind nun die Inklusionen

$$V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_r = V_d(rP, r_2 P_2, \ldots, r_n P_n)$$

als strikt nachzuweisen. Dazu sei analog den obigen Definitionen im Grad $d-1$

$$\begin{aligned} W_0 &:= V_{d-1}((r-2)P, r_2 P_2, \ldots, r_n P_n) \text{ und} \\ W_i &:= \{F \in W_0 \mid F_* = \sum a_i X^i Y^{r-2-i} + \ldots, \quad a_j = 0 \quad \text{für alle} \quad j < i\}. \end{aligned}$$

Per Induktion hat man dann eine Kette *strikter* Inklusionen

$$W_0 \supset W_1 \supset \cdots \supset W_{r-1} = V_{d-1}((r-2)P, r_2 P_2, \ldots, r_n P_n).$$

Ist daher $F_i \in W_i \setminus W_{i+1}$, so gilt $Y F_i \in V_i \setminus V_{i+1}$ für alle $i = 0, \ldots, r-2$ und $X F_{r-2} \in V_{r-1} \setminus V_r$. $\square$

Wir halten zwei Spezialfälle des Satzes fest:

1. Ist $r_1 = \cdots = r_m = 1$, dann besagt der Satz, daß das lineare System $V_d(P_1, \ldots, P_m)$ aller ebenen, projektiven Kurven vom Grad d, auf denen die Punkte $P_1, \ldots, P_m$ ($d > m$) liegen, die Dimension $N - 1 - m$ hat.

2. $V_d(2P_1, \ldots, 2P_m)$ ist das lineare System aller ebenen, projektiven Kurven vom Grad d ($d > 2m$), die die *singulären* Punkte $P_1, \ldots, P_m$ enthalten. Es hat die Dimension $N - 1 - 3m$.

3.3 Knotenkurven sind nicht-singuläre Punkte

Sei $C \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{P}_k^2$ eine ebene, projektive Kurve über k vom Grad d und seien $P_1, \ldots, P_m$ Punkte der projektiven Ebene $\mathbb{P}_k^2$. Wir knüpfen an die Überlegungen von Abschnitt 3.2 an und fassen $(C, P_1, \ldots, P_m)$ als Punkt der projektiven Varietät

$$\Pi_k := \mathbb{P}_k^{N-1} \times \mathbb{P}_k^2 \times \cdots \times \mathbb{P}_k^2$$

der Dimension $N-1+2m$ auf, indem wir wie dort (C, ι) als Punkt von $\mathbb{P}_k^{N-1}$ deuten und den Punkt P_ν als Punkt des ν-ten Faktors $\mathbb{P}_k^2$ $(\nu = 1, \ldots, m)$. Es seien $T_{i,j,k}$, $i, j, k \geq 0$, $i + j + k = d$, projektive Koordinaten für den ersten Faktor und X_ν, Y_ν, Z_ν, $\nu = 1, \ldots, m$, projektive Koordinaten für die übrigen m Faktoren.

Wir definieren die Untervarietät $W_k := W_k(d, m)$ von Π_k durch die $3m$ homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned} F_\nu &:= \sum_{i+j+k=d} T_{i,j,k} X_\nu^i Y_\nu^j Z_\nu^k = 0 \\ G_\nu &:= \frac{\partial F_\nu}{\partial X_\nu} = 0 \\ H_\nu &:= \frac{\partial F_\nu}{\partial Y_\nu} = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{2}$$

Sind $P_1, \ldots, P_m$ singuläre Punkte von C, so liegt $(C, P_1, \ldots, P_m) \in \Pi_k$ offensichtlich in W_k. Ist umgekehrt $(C, P_1, \ldots, P_m)$ ein Punkt von W_k und liegen alle Punkte P_ν im affinen Teil $D_+(Z)$ von $\mathbb{P}_k^2$, so sind $P_1, \ldots, P_m$ singuläre Punkte von C. Insbesondere gilt nach dem zweiten Spezialfall von Satz 2

$$\dim W_k = \dim V_d(2P_1, \ldots, 2P_m) + 2m = N - 1 - 3m + 2m = N - 1 - m.$$

Satz 3. *Ist C eine ebene, projektive Knotenkurve mit den Knoten $P_1, \ldots, P_m$, so ist $(C, P_1, \ldots, P_m)$ ein nicht-singulärer Punkt von W_k.*

Beweis. Sei also C eine solche Kurve und $P_1, \ldots, P_m$ ihre Knoten. In Π_k gehen wir zu den affinen Koordinaten

$$t_{i,j,k} = \frac{T_{i,j,k}}{T_{i_0,j_0,k_0}}, \qquad x_\nu = \frac{X_\nu}{Z_\nu}, \qquad y_\nu = \frac{Y_\nu}{Z_\nu}$$

so über, daß der Punkt $(C, P_1, \ldots, P_m)$ in der dadurch entstandenen Untervarietät W_k' von

$$\Pi_k' := \mathbb{A}_k^{N-1} \times \mathbb{A}_k^2 \times \cdots \times \mathbb{A}_k^2$$

liegt. Genauer ist die affine Variatät W_k' definiert durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_\nu &:= \sum_{i+j+k=d} t_{i,j,k} x_\nu^i y_\nu^j = 0 \\ g_\nu &:= \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu} = 0 \\ h_\nu &:= \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\nu} = 0 \qquad\qquad \nu = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{3}$$

Wir haben also zu zeigen, daß die Matrix

$$J := \begin{pmatrix} df_\nu \\ dg_\nu \\ dh_\nu \end{pmatrix}_{\nu=1,\ldots,m}$$

in dem zu $(C, P_1, \ldots, P_m)$ gehörenden, affinen Punkt $(C', P_1', \ldots, P_m')$ den Rang

$$N - 1 + 2m - \dim W_k' = N - 1 + 2m - (N - 1 - m) = 3m$$

hat. J ist eine $(3m) \times (N - 1 + 2m)$-Matrix und setzt sich aus den folgenden Blöcken zusammen:

$$J = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial t_{i,j,k}}\right)_{\substack{\nu=1,\ldots,m \\ i+j+k=d}} & \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right)_{\substack{\nu=1,\ldots,m \\ \mu=1,\ldots,m}} & \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\mu}\right)_{\substack{\nu=1,\ldots,m \\ \mu=1,\ldots,m}} \\ \left(\frac{\partial g_\nu}{\partial t_{i,j,k}}\right)_{\substack{\nu=1,\ldots,m \\ i+j+k=d}} & \left(\frac{\partial g_\nu}{\partial x_\mu}\right)_{\substack{\nu=1,\ldots,m \\ \mu=1,\ldots,m}} & \left(\frac{\partial g_\nu}{\partial y_\mu}\right)_{\substack{\nu=1,\ldots,m \\ \mu=1,\ldots,m}} \\ \left(\frac{\partial h_\nu}{\partial t_{i,j,k}}\right)_{\substack{\nu=1,\ldots,m \\ i+j+k=d}} & \left(\frac{\partial h_\nu}{\partial x_\mu}\right)_{\substack{\nu=1,\ldots,m \\ \mu=1,\ldots,m}} & \left(\frac{\partial h_\nu}{\partial y_\mu}\right)_{\substack{\nu=1,\ldots,m \\ \mu=1,\ldots,m}} \end{pmatrix}$$

Dabei wurden die Variablen $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_m, y_m$ neu geordnet zu x_1, x_2, $\ldots$, x_m, y_1, $\ldots$, y_m. Dies entspricht einem Basiswechsel und hat keinen Einfluß auf den Rang von J.

Wir betrachten die Blockmatrizen einzeln im Punkt $(C', P_1', \ldots, P_m')$. Die oberen Blöcke rechts und in der Mitte sind beide Null, da für alle $\mu \neq \nu$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}$ und $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\mu}$ verschwinden und außerdem die P_ν' singuläre Punkte von C' sind, d.h.

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu}(P_\nu') = g_\nu(P_\nu') = 0, \qquad \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\nu}(P_\nu') = h_\nu(P_\nu') = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, m.$$

Wir betrachten nun die $(2m \times 2m)$-Teilmatrix der vier Blöcke unten rechts von J in einer neuen Basis, die dadurch entsteht, daß wir die obige Spaltenvertauschung wieder rückgängig machen und außerdem auf die gleiche Weise die Zeilen vertauschen. Man erhält eine Matrix, die aus den m^2 Blöcken

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_\mu^2} & \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_\mu y_\mu} \\ \\ \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial y_\mu x_\mu} & \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial y_\mu^2} \end{pmatrix}_{\substack{\nu=1,\ldots,m \\ \mu=1,\ldots,m}}$$

besteht. Sie sind für $\nu \neq \mu$ sämtlich Null, es bleiben also nur die Diagonalblöcke stehen. Diese haben nach Lemma 5 eine von Null verschiedene Determinante, weil die P'_ν Knoten sind. Der gesamte untere rechte $(2m \times 2m)$-Block von J ist daher invertierbar.

Es ist also der Rang der oberen linken Teilmatrix zu bestimmen. Sie hat die Gestalt

$$\left(\alpha_\nu^i \, \beta_\nu^j\right)_{\substack{\nu=1,\ldots,m \\ i+j+k=d}}$$

wenn die Knoten P'_ν die Koordinaten (α_ν, β_ν) haben. Ihr Kern ist also gerade der Vektorraum $V_d(P_1, \ldots, P_m) \cup \{0\}$, dessen Dimension wir nach dem ersten Spezialfall von Satz 2 kennen. Wir erhalten insgesamt:

$$\begin{aligned} \operatorname{rang} J(C', P'_1, \ldots, P'_m) &= N - 1 + 2m - \dim \operatorname{Ker} J(C', P'_1, \ldots, P'_m) \\ &= N - 1 + 2m - (N - 1 - m) \\ &= 3m. \end{aligned} \qquad \square$$

4 Hochheben von Kurven

Sei C eine irreduzible, vollständige Kurve über einem Körper k und $\widetilde{C} \longrightarrow C$ ihre Normalisierung. Dann kann man das geometrische Geschlecht $p_g(\widetilde{C})$ von $\widetilde{C}$ aus dem arithmetischen Geschlecht $p_a(C)$ von C und der sog. *Singularitätszahl* $\delta(C)$ von C berechnen:

$$p_g(\widetilde{C}) = p_a(C) - \delta(C). \tag{4}$$

Die Singularitätszahl mißt den Grad der Singularität der Kurve C und berechnet sich aus der Anzahl und Struktur der singulären Punkte von C. Sind z. B. alle Singularitäten Knoten, so ist $\delta(C)$ einfach die Anzahl dieser singulären Punkte. Im allgemeinen ist $\delta(C)$ eine nicht-negative ganze Zahl, und es ist $\delta(C) = 0$ genau dann, wenn C nicht-singulär ist.

Ist nun C eine ebene, projektive Kurve über k vom Grad d, so berechnet sich das arithmetische Geschlecht von C zu

$$p_a(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

und man erhält die *Plückerformel*

$$p_g(\widetilde{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta(C). \tag{5}$$

4.1 Der Fall ebener Knotenkurven

Es sei jetzt k ein algebraisch abgeschlossener Körper, der positive Charakteristik p habe. R sei ein kompletter, diskreter Bewertungsring der Charakteristik 0 mit k als Restklassenkörper. Mit K bezeichnen wir den Quotientenkörper von R. Sei C eine irreduzible, ebene, projektive, m-fache Knotenkurve über k vom Grad d und $P_1, \ldots, P_m$ ihre Knoten. C habe das geometrische Geschlecht g. Dann liest sich die Plückerformel als

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - m. \tag{6}$$

Wir wollen C zu einer Kurve über R hochheben unter Erhaltung des Geschlechts:

Satz 4. *Es gibt eine ebene, irreduzible, projektive Kurve $\mathcal{C}$ vom Grad d über R derart, daß gilt:*

1. *Die abgeschlossene Faser $\mathcal{C}_k = \mathcal{C} \times \mathrm{Spec}(k)$ ist die Kurve C, also eine m-fache Knotenkurve vom Grad d.*

2. *Die generische Faser $\mathcal{C}_K = \mathcal{C} \times Spec(K)$ ist ebenfalls eine m-fache Knotenkurve vom Grad d.*

Insbesondere haben $\mathcal{C}_k$ und $\mathcal{C}_K$ dasselbe arithmetische bzw. geometrische Geschlecht.

Bevor wir Satz 4 beweisen, betrachten wir zwei Beispiele. Sei C_f zunächst eine ebene, affine, m-fache Knotenkurve über k vom Grad d und geometrischem Geschlecht g. C_f ist durch eine Gleichung $f(x, y) = 0$ gegeben. Wir wollen C_f zu einer Kurve über R hochheben unter Erhaltung des Geschlechts. Wegen der Relation (6) hat man daher das Polynom $f \in k[x, y]$ zu einem Polynom $\phi \in R[x, y]$ von gleichem Grad hochzuheben derart, daß über den Knoten von f wieder Knoten liegen.

Beispiel 5. Sei

$$f = x^2 - y^2 - y^3$$

und $\mathrm{char}(k) > 2$. Über k ist C_f eine 1-fache Knotenkurve mit dem Knoten $(0, 0)$. Wir müssen die Koeffizienten von f so hochheben, daß über $(0, 0)$ ein Knoten liegt. Der Punkt $(0, 0) \in \mathbb{A}^2_R$ spezialisiert zu $(0, 0) \in \mathbb{A}^2_k$ und man kann hier einfach $\phi = x^2 - y^2 - y^3$ wählen. Die Wahl der Repräsentanten aus den Restklassen der Koeffizienten und der Koordinaten der Knoten ist aber keineswegs kanonisch. Zum Beispiel ist auch die durch $\psi = py + x^2 - y^2 - y^3$ definierte Kurve eine Hochhebung von f. Der Punkt $(0, 0)$ ist aber kein singulärer Punkt mehr von $\mathcal{C}_\psi = \mathrm{Spec}(R[x, y]/(\psi))$, weil jetzt $\psi_y(0, 0) = p \neq 0$ ist.

Beispiel 6. Die Kurve C_f mit

$$f = 3x^2 - 3y^2 + 2y^3 + y^p$$

aus den Beispielen 1 und 3 ist eine 2-fache Knotenkurve mit den Knoten $(0, 0)$ und $(0, 1)$. Wir haben schon gesehen, daß man f nicht so naiv wie im vorherigen Beispiel hochheben kann zu

$$\phi = 3x^2 - 3y^2 + 2y^3 + y^p.$$

Denn über $(0, 0)$ liegt dann zwar in der Tat wieder ein Knoten, aber der Punkt $(0, 1)$ ist jetzt nicht mehr singulär, weil $\phi_y(0, 1) = p \neq 0$ ist.

Im allgemeinen liegen über den Knoten also nicht-singuläre Punkte. Die Idee ist nun mit den Gleichungen $f(P_i) = 0$ auch die Gleichungen $f_x(P_i) = f_y(P_i) = 0$ hochheben.

Beweis von Satz 4. Durch einen projektiven Koordinatenwechsel auf $\mathbb{P}^2_k$ kann man erreichen, daß die Punkte $P_1, \ldots, P_m$ alle in dem affinen Teil $D_+(Z)$ liegen. Da die Aussage des Satzes nur vom Isomorphietyp von C abhängt, nehmen wir also o. E. $P_1, \ldots, P_m \in D_+(Z)$ an.

Dann ist $(C, P_1, \ldots, P_m)$ ein Punkt auf der projektiven Varietät W_k, die durch das Gleichungssystem (2) definiert ist. $(C', P'_1, \ldots, P'_m)$ sei wieder der zugehörige Punkt auf der affinen Varietät W'_k, die durch die Gleichungen (3) definiert ist. Diese Gleichungen haben aber Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, wir können sie daher als Gleichungen über R interpretieren. Auf diese Weise definiert (3) auch ein abgeschlossenes Unterschema $W'_R := W'_R(d, m)$ von $\Pi'_R := \mathbb{A}^{N-1}_R \times \mathbb{A}^2_R \times \cdots \times \mathbb{A}^2_R$. Die gesuchte Kurve $\mathcal{C}$ über R (bzw. genauer deren affinen Teil $\mathcal{C}'$) erhält man nun durch Hochheben des k-wertigen Punktes $(C', P'_1, \ldots, P'_m) \in W'_k$ zu einem R-wertigen Punkt $(\mathcal{C}', Q'_1, \ldots, Q'_m) \in W'_R$. Dies geschieht mit Hilfe der folgenden Verallgemeinerung des Henselschen Lemmas für Systeme von Polynomen in mehreren Variablen ([Mum, S. 247]):

Satz 5 (Henselsches Lemma für Varietäten). *Sei R ein kompletter lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper k. Seien $f_1, \ldots, f_n \in R[x_1, \ldots, x_n]$ und $a_1, \ldots, a_n \in k$. Es bezeichne $\bar{f}_i$ das Bild von f_i in $k[x_1, \ldots, x_n]$. Es gelte*

$$\begin{array}{ll} (i) & \bar{f}_1(a_1, \ldots, a_n) = \cdots = \bar{f}_n(a_1, \ldots, a_n) = 0 \textit{ und} \\ (ii) & \det\left(\dfrac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}\right)(a_1, \ldots, a_n) \neq 0. \end{array}$$

Dann gibt es (eindeutig bestimmte) Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$, so daß gilt:

$$\begin{array}{ll} (1) & \alpha_i \equiv a_i \pmod{\mathfrak{m}} \quad \textit{für alle} \quad i = 1, \ldots, n \\ (2) & f_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \cdots = f_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0. \end{array}$$

Beweis. Wir approximieren die gesuchten Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ schrittweise und zeigen dazu induktiv, daß es für alle $r \geq 1$ Elemente $a_1^{(r)}, \ldots, a_n^{(r)} \in R$ gibt, so daß für alle $i = 1, \ldots, n$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{array}{ll} (1) & a_i^{(r)} \equiv a_i \pmod{\mathfrak{m}} \\ (2) & f_i(a_1^{(r)}, \ldots, a_n^{(r)}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^r} \\ (3) & a_i^{(r)} \equiv a_i^{(r-1)} \pmod{\mathfrak{m}^r} \end{array}$$

Die Elemente $\alpha_i := \lim\limits_{r \longrightarrow \infty} a_i^{(r)}$ erfüllen dann die Bedingungen (1) und (2) des Satzes.

Für $r = 1$ genügt es beliebige Repräsentanten $a_1^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}$ der Elemente $a_1, \ldots, a_n \in k$ in R zu wählen. Sei also $r \geq 2$. Wir setzen $a_i^{(r+1)} := a_i^{(r)} + \epsilon_i$ mit noch zu bestimmenden $\epsilon_i \in \mathfrak{m}^r$. Dann ist

$$f_i(a_1^{(r+1)}, \ldots, a_n^{(r+1)}) \equiv \\ f_i(a_1^{(r)}, \ldots, a_n^{(r)}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_n) \cdot \epsilon_j \pmod{\mathfrak{m}^{r+1}}.$$

Um die Bedingung (2) zu erfüllen haben wir $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ so zu bestimmen, daß

$$\begin{pmatrix} f_1(a_1^{(r)}, \ldots, a_n^{(r)}) \\ \vdots \\ f_n(a_1^{(r)}, \ldots, a_n^{(r)}) \end{pmatrix} + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(a_1, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^{r+1}}.$$

Die Voraussetzung (ii) besagt nun, daß die Determinate der Matrix

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(a_1, \ldots, a_n)$$

eine Einheit in R ist. Daher gibt es eine dazu inverse Matrix $B = (b_{ij})$ mit Einträgen aus R und man kann

$$\epsilon_i := -\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot f_j(a_1^{(r)}, \ldots, a_n^{(r)})$$

setzen. Es ist dann $\epsilon_i \in \mathfrak{m}^r$, weil die $f_j(a_1^{(r)}, \ldots, a_n^{(r)})$ nach Induktionsvoraussetzung (2) in $\mathfrak{m}^r$ liegen. Daher gilt auch (3) und wieder induktiv schließlich auch (1). □

Der Satz ist anwendbar auf die Varietät W_k', weil Satz 3 besagt, daß der Rang der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} df_\nu \\ dg_\nu \\ dh_\nu \end{pmatrix}_{\nu=1,\ldots,m}$$

im Punkt $(C', P_1', \ldots, P_m')$ gleich $3m$ ist. Es gibt also homogene (sogar lineare) Polynome $p_1, \ldots, p_{N-1-m}$ aus dem Koordinatenring von Π_k' derart, daß $f_\nu, g_\nu, h_\nu, p_1, \ldots, p_{N-1-m}$, $\nu = 1, \ldots, m$, die Voraussetzungen des Satzes im Punkt $(C', P_1', \ldots, P_m')$ erfüllen.

Der Satz garantiert dann die Existenz eines Punktes $(\mathcal{C}', Q_1', \ldots, Q_m') \in W_R'$ der nach $(C', P_1', \ldots, P_m')$ spezialisiert. $\mathcal{C}'$ ist also eine affine Kurve über

R vom Grad d, die die Gleichungen (3) erfüllt, d.h. $Q'_1, \dots, Q'_m$ sind singuläre Punkte von $\mathcal{C}'$. Die Q'_i sind paarweise verschieden, weil sie modulo $\mathfrak{m}$ paarweise verschieden sind.

Die abgeschlossene Faser $\mathcal{C}' \times \mathrm{Spec}(k)$ von $\mathcal{C}'$ ist die Kurve C'. Die Punkte $P'_i = Q'_i \times \mathrm{Spec}(k)$ sind also Knoten. Die generische Faser $\mathcal{C}'_K = \mathcal{C}' \times \mathrm{Spec}(K)$ ist aber auch eine m-fache Knotenkurve. Ist nämlich o. E. $P' = (0,0)$ ein Knoten von C', so hat die C' definierende Gleichung $f \in k[x,y]$ die Form

$$f = f_2 + \cdots + f_r, \quad f_i \text{ homogen vom Grad } i,$$

und $f_2 = l_1 l_2$ ist das Produkt zweier teilerfremder Linearformen. Sei o. E. $Q' = (0,0) \in \mathbb{A}^2_R$ der über P' liegende Punkt. Dann hat die $\mathcal{C}'$ definierende Gleichung $\phi \in R[x,y]$ die Form

$$\phi = \phi_2 + \cdots + \phi_r, \quad \deg \phi_i = i, \quad f_i = \bar{\phi}_i := \phi_i \pmod{\mathfrak{m}},$$

weil Q' ein singulärer Punkt ist. Das gewöhnliche Henselsche Lemma sichert nun die Existenz von Linearformen $\lambda_1, \lambda_2 \in R[x,y]$ mit

$$\phi_2 = \lambda_1 \lambda_2 \quad \text{und} \quad \bar{\lambda}_i = l_i, \quad i = 1, 2.$$

Die λ_i sind teilerfremd, weil sie es modulo $\mathfrak{m}$ sind, und mit der Bemerkung nach Lemma 6 bedeutet das, daß Q' ein Knoten von $\mathcal{C}'_K$ ist.

Daher sind die Punkte Q'_i Knoten von $\mathcal{C}'$ und die beiden Fasern haben dieselbe Anzahl m von Knoten als einzige Singularitäten.

Es sei nun $\mathcal{C}$ der projektive Abschluß von $\mathcal{C}'$ in $\mathbb{P}^2_R$. Dann ist $\mathcal{C}$ eine ebene projektive Kurve vom Grad d über R. Die abgeschlossene und generische Faser von $\mathcal{C}$ haben denselben Grad (also auch dasselbe arithmetische Geschlecht) und dieselbe Singularitätszahl (Im Unendlichen ist $\mathcal{C}$ nicht-singulär, weil $\mathcal{C}'$ es ist.) und daher aufgrund der Formel (5) auch dasselbe geometrische Geschlecht. $\square$

4.2 Der allgemeine Fall: Beweis des Hauptsatzes

Wir wollen uns jetzt nicht mehr auf ebene Kurven beschränken und schließlich das eingangs gestellte Hochhebeproblem lösen. Sei also C_0 eine irreduzible, nicht-singuläre, projektive Kurve über k vom Geschlecht g. Wir zeigen:

Satz 6. *Es gibt eine irreduzible, glatte Kurve $\mathcal{C}_0$ über R derart, daß die Fasern von $\mathcal{C}_0$ irreduzible, nicht-singuläre Kurven vom Geschlecht g sind und die abgeschlossene Faser $(\mathcal{C}_0)_k$ isomorph zu C_0 ist.*

Beweis. C_0 ist birational äquivalent zu einer ebene Knotenkurve $C \subset \mathbb{P}_k^2$. C hat also das gleiche geometrische Geschlecht wie C_0. Sei

$$C' = \operatorname{Spec}\left(k[x, y]/(f(x, y)\right)$$

eine affine, offene Teilmenge von C, die alle Knoten von C enthalte.

Wir behaupten zunächst, daß wir f nach einem linearen Koordinatenwechsel von der Form

$$f(x, y) = y^d + a_1(x)y^{d-1} + \cdots + a_{d-1}(x)y + a_d(x)$$

mit $a_i(x) \in k[x]$ und $\deg f = d$ annehmen können. Für $a \in k$ betrachten wir dazu die lineare Transformation

$$\begin{array}{rcl} x & \longmapsto & x' := x - ay \\ y & \longmapsto & y. \end{array}$$

Bezeichnet f_d den homogenen Teil vom Grad d von f, so ist der Term höchsten Grades in y von $f_d(x' + ay, y)$ gerade $f_d(a, 1)y^d$. Wir müssen das transformierte Polynom $f'(x', y) := f(x' + ay, y)$ also noch durch den Faktor $f_d(a, 1)$ teilen und betrachten dazu $f_d(a, 1)$ als Polynom in a. Per Definition kann dies nicht das Nullpolynom sein. Nun hat der Körper k unendlich viele Elemente, weil er nach Voraussetzung algebraisch abgeschlossen ist. Daher ist $f_d(a, 1)$ auch nicht die Nullabbildung, d.h. für jedes hinreichend allgemeine $a \in k$ gilt $f_d(a, 1) \neq 0$, und die Behauptung ist bewiesen. (Die Aussage folgt auch aus dem Noetherschen Normalisierungssatz, ein Spezialfall dessen wir hier bewiesen haben, nämlich daß die Ringerweiterung

$$k[x] \cong k[x'] \hookrightarrow k[x', y]/(f') \cong k[x, y]/(f)$$

ganz ist, s. u. und vgl. [Eis, Thm. 13.3].)

Wie in Satz 4 heben wir jetzt C' zu einer ebenen, affinen Kurve $\mathcal{C}'$ gleichen Grades über R hoch. $\mathcal{C}'$ ist dann durch eine Hochhebung ϕ von f definiert und ϕ hat die Form

$$\phi(x, y) = \alpha y^d + \alpha_1(x)y^{d-1} + \cdots + \alpha_{d-1}(x)y + \alpha_d(x)$$

mit $\alpha_i(x) \in R[x]$, $\deg \phi = d$ und $\alpha \in R \backslash \mathfrak{m} = R^\times$ (andernfalls hätte $f = \bar{\phi} = \phi$ mod $\mathfrak{m}$ nicht den Grad d). Wir können diese Gleichung also noch durch α teilen und nehmen daher ab jetzt $\alpha = 1$ an.

Wir betrachten jetzt den aus den natürlichen Abbildungen zusammengesetzten, injektiven Ringhomomorphismus

$$\theta : R[x] \longrightarrow R[x, y] \longrightarrow R[x, y]/(\phi),$$

und die so bestimmte Ringerweiterung $R[x,y]/(\phi) \,/\, R[x]$. Die Reduktion modulo (ϕ) der oben erhaltenen Gleichung

$$\phi(x,y) = y^d + \alpha_1(x) f^{d-1} + \cdots + \alpha_{d-1}(x) y + \alpha_d(x)$$

ist nun eine Ganzheitsgleichung für das Bild von y in $R[x,y]/(\phi)$ über $R[x]$, d.h. $R[x,y]/(\phi)$ ist ganz über $R[x]$. Daher induziert θ einen *endlichen* Morphismus

$$\theta^* : \mathcal{C}' = \operatorname{Spec}(R[x,y]/(\phi)) \longrightarrow \operatorname{Spec}(R[x]) = \mathbb{A}^1_R$$

von affinen R-Kurven.

Sei nun $\Phi \in R[X,Y,Z]$ die Homogenisierung von ϕ (Die projektiven Koordinaten seien so gewählt, daß $x = \frac{X}{Z}$ und $y = \frac{Y}{Z}$):

$$\Phi(X,Y,Z) = Y^d + \beta_1(X,Z) Y^{d-1} + \cdots + \beta_{d-1}(X,Z) Y + \beta_d(X,Z) \qquad (7)$$

Wie im Beweis von Satz 4 sei

$$\mathcal{C} := \operatorname{Proj}(R[X,Y,Z]/(\Phi))$$

der projektive Abschluß von $\mathcal{C}'$ in $\mathbb{P}^2_R$. Wir gehen analog dem affinen Fall vor und definieren den graduierten Ringhomomorphismus

$$\Theta : R[X,Z] \longrightarrow R[X,Y,Z] \longrightarrow R[X,Y,Z]/(\Phi)$$

als Verkettung der natürlichen Abbildungen. Dieser induziert zunächst lediglich einen Morphismus von der offenen Teilmenge

$$U := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(R[X,Y,Z]/(\Phi)) \mid \mathfrak{p} \not\supseteq \Theta(R[X,Z]_+)\} \subset \mathcal{C}$$

nach $\operatorname{Proj}(R[X,Z]) = \mathbb{P}^1_R$, wobei wir mit $R[X,Z]_+$ das Ideal des graduierten Ringes $R[X,Z]$ bezeichnen, das aus allen Elementen von positivem Grad besteht. Wir zeigen, daß $\mathcal{C} = U$ ist. Sei also $\mathfrak{p} \in \mathcal{C}$, d.h. $\mathfrak{p}$ ist ein homogenes Primideal in $R[X,Y,Z]/(\Phi)$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{p} \not\supseteq (R[X,Y,Z]/(\Phi))_+$. Es ist zu zeigen, daß $\mathfrak{p} \not\supseteq \Theta(R[X,Z]_+)$ ist. Angenommen, das wäre nicht der Fall. Dann enthielte $\mathfrak{p}$ alle Polynome in X, Z vom Grad > 0. Aufgrund der Relation (7) wäre dann auch Y^d und somit auch Y in $\mathfrak{p}$ enthalten. Also enthielte $\mathfrak{p}$ alle homogenen Polynome modulo (Φ) von positivem Grad im Widerspruch zu $\mathfrak{p} \not\supseteq (R[X,Y,Z]/(\Phi))_+$.

Wir erhalten also einen Morphismus von projektiven R-Kurven

$$\Theta^* : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1_R.$$

Wir zeigen als nächstes, daß auch Θ^* endlich ist. In der Tat, $\mathcal{C}$ ist überdeckt von den beiden offenen, affinen Teilmengen

$$D_+(X) \quad \text{und} \quad D_+(Z).$$

Auf $D_+(Z)$ ist Θ^* induziert von $\theta : R[x] \longrightarrow R[x,y]/(\phi)$, dessen Endlichkeit wir oben schon gesehen haben. Auf $D_+(X)$ ist Θ^* induziert von $\theta' : R[z'] \longrightarrow R[y',z']/(\Phi')$, wobei $y' = \frac{Y}{X}, z' = \frac{Z}{X}$ und ϕ' die Dehomogenisierung von Φ bzgl. X ist. Dieser Ringhomomorphismus ist aber aus dem gleichen Grund endlich: Dehomogenisierung der Gleichung (7) bzgl. X liefert eine Ganzheitsgleichung für das Bild von y' in $R[y',z']/(\phi')$ über $R[z']$, d.h. θ' ist endlich.

Sei nun $\widetilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ die Normalisierung von $\mathcal{C}$ und sei $\widetilde{\mathbb{P}^1_R} \longrightarrow \mathbb{P}^1_R$ die Normalisierung von $\mathbb{P}^1_R$ im Funktionenkörper $K(\mathcal{C}')$ von $\mathcal{C}'$ ($K(\mathcal{C}')/K(t)$ ist von dem endlichen Morphismus $\mathcal{C}' \longrightarrow \mathbb{A}^1_R \hookrightarrow \mathbb{P}^1_R$ induziert). Weil Θ^* endlich ist, ist auch die Verkettung $\widetilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1_R$ endlich, und es folgt, daß die beiden Normalisierungen $\widetilde{\mathcal{C}}$ und $\widetilde{\mathbb{P}^1_R}$ isomorph (über $\mathbb{P}^1_R$) sind. Insgesamt erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{C}} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "\Theta^*"] & \mathcal{C}' \arrow[l] \arrow[d, "\theta^*"] \\ \widetilde{\mathbb{P}^1_R} \arrow[r] & \mathbb{P}^1_R & \mathbb{A}^1_R. \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{8}$$

Aus Abschnitt 2 wissen wir, daß die Normalisierung von $\mathbb{P}^1$ über dem diskreten Bewertungsring R flach ist. Also gilt dies auch für $\widetilde{\mathcal{C}}$.

Nach Konstruktion (vgl. Satz 4) ist $\mathcal{C}$ eine ebene, projektive Knotenkurve über R, deren Fasern dasselbe geometrische Geschlecht g haben und deren abgeschlossene Faser $\mathcal{C}_k$ isomorph zu C ist. Wir behaupten, daß die Kurve $\widetilde{\mathcal{C}}$ die gesuchte Kurve $\mathcal{C}_0$ ist und betrachten dazu das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{C}}_K \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}_K \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(K) \arrow[d] \\ \widetilde{\mathcal{C}} \arrow[r] & \mathcal{C} \arrow[r] & \mathrm{Spec}(R) \\ \widetilde{\mathcal{C}}_k \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{C}_k \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Spec}(k). \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{9}$$

Dabei bezeichnet $\widetilde{\mathcal{C}}_K := \widetilde{\mathcal{C}} \times \mathrm{Spec}(K)$ die generische und $\widetilde{\mathcal{C}}_k := \widetilde{\mathcal{C}} \times \mathrm{Spec}(k)$ die abgeschlossene Faser von $\widetilde{\mathcal{C}}$.

Die generische Faser $\widetilde{\mathcal{C}}_K$ ist gleich der Normalisierung der generischen Faser $\mathcal{C}_K$, weil Normalisieren mit Lokalisieren vertauscht.

Die abgeschlossene Faser $\widetilde{\mathcal{C}}_k$ ist irreduzibel. In der Tat, wir betrachten $\widetilde{\mathcal{C}}_k$ wie im Diagramm (8) als Kurve über $\mathbb{P}^1_R$. Dann liegen die generischen Punkte $\widetilde{\eta}_i$ von $\widetilde{\mathcal{C}}_k$ über dem generischen Punkt η von $\mathbb{P}^1_R$. Der lokale Ring $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R,\eta}$ ist gerade der Bewertungsring der

Gaußbewertung v_t auf $K(t) = K(\mathbb{P}^1_R)$. Die generischen Punkte der abgeschlossenen Faser $\widetilde{\mathcal{C}}_k$ entsprechen den Fortsetzungen von v_t auf $K(\widetilde{\mathcal{C}})$. Nun ist aber

$$[K(\widetilde{\mathcal{C}}) : K(t)] = [K(\mathcal{C}) : K(t)] = [K(\mathcal{C}_k) : k(t)],$$

somit hat v_t (wegen der fundamentalen Ungleichung für die endliche, separable Körpererweiterung $K(\widetilde{C})/K(t)$) eine *eindeutige* Fortsetzung auf $K(\widetilde{\mathcal{C}})$. Das bedeutet, daß über η genau ein generischer Punkt $\widetilde{\eta}$ von $\widetilde{\mathcal{C}}$ liegt, und dieser ist der generische Punkt der abgeschlossenen Faser $\widetilde{\mathcal{C}}_k$.

Im Teildiagramm unten links von (9) induziert die Normalisierung $\widetilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ den birationalen Morphismus

$$\widetilde{\mathcal{C}}_k = \widetilde{\mathcal{C}} \times \mathrm{Spec}(k) \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathrm{Spec}(k) = \mathcal{C}_k$$

auf den abgeschlossenen Fasern.

Wir zeigen jetzt, daß die Fasern von $\widetilde{\mathcal{C}}$ nicht-singuläre Kurven sind. Für die generische Faser ist das klar, da $\widetilde{\mathcal{C}}_K$ eine normale Kurve über K ist. Insbesondere sind dann das arithmetische und das geometrische Geschlecht von $\widetilde{\mathcal{C}}_K$ gleich. Die beiden Fasern $\widetilde{\mathcal{C}}_K$ und $\widetilde{\mathcal{C}}_k$ haben nun beide das gleiche geometrische Geschlecht wie die Kurve $\mathcal{C}_k \cong C$, weil das für die Kurve $\mathcal{C}_K$ der Fall ist und das geometrische Geschlecht eine birationale Invariante ist. Die arithmetischen Geschlechter der Fasern sind aber auch gleich, weil $\widetilde{\mathcal{C}}$ flach über R ist. Daher haben wir mit Formel (4) insgesamt

$$p_a(\widetilde{\mathcal{C}}_k) = p_a(\widetilde{\mathcal{C}}_K) = p_g(\widetilde{\mathcal{C}}_K) = p_g(\widetilde{\mathcal{C}}_k) = p_a(\widetilde{\mathcal{C}}_k) - \delta(\widetilde{\mathcal{C}}_k),$$

also $\delta(\widetilde{\mathcal{C}}_k) = 0$, d.h. $\widetilde{\mathcal{C}}_k$ ist nicht-singulär.

$\widetilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathrm{Spec}\, R$ ist also ein flacher Morphismus von endlichem Typ dessen abgeschlossene Faser eine nicht-singuläre Kurve ist. Daher (vgl. [Mum, S. 304]) ist $\widetilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathrm{Spec}\, R$ glatt (von relativer Dimension 1). Insbesondere ist der birationale Morphismus

$$\widetilde{\mathcal{C}}_k \longrightarrow \mathcal{C}_k \cong C \longrightarrow C_0$$

ein Isomorphismus von k-Kurven. Die Kurve $\mathcal{C}_0 := \widetilde{\mathcal{C}}$ erfüllt somit alle Forderungen von Satz 6. $\square$

Beispiel 7. Wir wollen jetzt auch die 2-fache Knotenkurve C_f mit

$$f = 3x^2 - 3y^2 + 2y^3 + y^p$$

aus Beispiel 1 über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $p > 3$ hochheben. Dazu haben wir gleichzeitig Hochhebungen zu finden für

- die Koeffizienten von $f(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 2y^3 + y^p$,
- die Koordinaten der Knoten $(0, 0)$ und $(0, 1)$,
- die Koeffizienten der Gleichungen $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ und $f_x(0, 1) = f_y(0, 1) = 0$.

Wir heben die Knoten zu $(0, 0)$ bzw. $(0, 1) \in \mathbb{A}^2_R$ hoch. Wir müssen jetzt andere Repräsentanten der Restklassen der Koeffizienten von f als in Beispiel 6 wählen.

Um die Bedingung $\phi_y(0, 1) = 0$ zu erfüllen möchte man

$$\phi(x, y) = -py + 3x^2 - 3y^2 + 2y^3 + y^p$$

setzen, d.h. den Koeffizienten 0 bei y zu $-p$ hochheben. Aber dann ist $(0, 0)$ kein singulärer Punkt mehr von $\mathcal{C}_\phi$.

Wir heben jetzt 1 bei y^p zu $1 - p$ hoch und 0 bei y^{p-1} zu p. Dann ist

$$\phi(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 2y^3 + py^{p-1} + (1 - p)y^p$$

und in der Tat erfüllt $\mathcal{C}_\phi = \operatorname{Spec}(R[x, y]/(\phi))$ jetzt die geforderten Eigenschaften:

1. ϕ ist eine Hochhebung von f, weil

   $$\bar{\phi} = \phi \pmod{\mathfrak{m}} = 3x^2 - 3y^2 + 2y^3 + y^p = f.$$

2. $(0, 0)$ und $(0, 1)$ liegen auf $\mathcal{C}_\phi$, weil

   $$\phi(0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \phi(0, 1) = -3 + 2 + p + 1 - p = 0.$$

3. $(0, 0)$ und $(0, 1)$ sind singuläre Punkte von $\mathcal{C}_\phi$, weil

   $$\phi_x = 6x, \qquad \phi_y = -6y + 6y^2 + p(p-1)y^{p-2} + p(1 - p)y^{p-1}$$

   und daher

   $$\phi_x(0, 0) = \phi_y(0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \phi_x(0, 1) = \phi_y(0, 1) = 0.$$

Literatur

[A-M] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G., Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[Deu] Deuring, M., Lectures on the Theory of Algebraic Functions of One Variable, LNM 314, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1973.

[Eis] Eisenbud, D., Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry, GTM 150, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1996.

[Ful] Fulton, W., Algebraic Curves, W. A. Benjamin Inc., New York Amsterdam, 1969.

[Gre] Green, B., On Curves over Valuation Rings and Morphisms to $\mathbb{P}^1$, *J. of Number Theory* **59** (1996), 291-312.

[G-M-P1] Green, B., Matignon, M., Pop, F., On valued function fields II: Regular functions and elements with the uniquness property, *J. reine angew. Math.* **412** (1990), 128-149.

[G-M-P2] Green, B., Matignon, M., Pop, F., On valued function fields III: Reductions of Algebraic Curves, *J. reine angew. Math.* **432** (1992), 117-133.

[G-M-P3] Green, B., Matignon, M., Pop, F., On the Local Skolem Property, *J. reine angew. Math.* **458** (1995), 183-199.

[Har] Hartshorne, R., Algebraic Geometry, GTM 52, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1997.

[Kna] Knaf, H., On the integral closure of polynomial rings over a valuation domain, preprint, to appear in the *Journal of Algebra* (1998).

[Mum] Mumford, D., The Red Book of Varieties and Schemes, LNM 1358, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1988.

[Mur] Murre, J. P., An Introduction to Grothendieck's Theory of the Fundamental Group, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1967.

[Po1] Popp, H., Zur Reduktion algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1: Existenz einer regulären Reduktion zu vorgegebenem Funktionenkörper als Restklassenkörper, *Arch. Math.* **17** (1965), 510-522.

[Po2] Popp, H., Fundamentalgruppen algebraischer Mannigfaltigkeiten, LNM 176, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1970.

[Roq] Roquette, P., Zur Theorie der Konstantenreduktion algebraischer Mannigfaltigkeiten, *J. reine angew. Math.* **200** (1958), 1-44.